

Н новости фундаментальной физики
фф

выпуск **9**

**ЧЕРНЫЕ
ДЫРЫ**



Москва · 1978



Новости фундаментальной физики

Выпуск

9

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

сборник статей

Перевод с английского

И.В. ВОЛОВИЧА, В.А. ЗАГРЕБНОГО

и

В.П. ФРОЛОВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО

"МИР"

МОСКВА • 1978

Сборник содержит статьи крупных зарубежных ученых по классической и квантовой физике черных дыр, опубликованные в 1975 — 1977 гг. Статьи посвящены вопросам, связанным с квантовыми процессами вблизи черных дыр, термодинамикой и возможными астрофизическими проявлениями черных дыр. Вступительная статья — краткий обзор современного состояния проблемы — снабжена подробным библиографическим указателем.

Сборник представляет интерес для физиков и астрономов, занимающихся релятивистской астрофизикой, а также для студентов старших курсов и аспирантов соответствующих специальностей.

Редакция литературы по физике

Вступительная статья

Черные дыры: квантовые процессы, термодинамика, астрофизика

В.П. Фролов

ВВЕДЕНИЕ

Благодаря теоретическим исследованиям, выполненным главным образом за последние 10 – 15 лет, и развитию новых методов наблюдений (например, рентгеновской и гамма-астрономии) в физике возникла и получила интенсивное развитие по сути дела новая область – физика черных дыр. До недавнего времени она рассматривала в основном возможность образования черных дыр и их взаимодействие как между собой, так и с физическими полями и частицами в рамках классической (неквантовой) теории, и лишь за последние 4 – 5 лет появились работы о возможных квантовых эффектах в черных дырах.

Открытое Хокингом в 1974 г. явление неустойчивости вакуума в гравитационном поле черных дыр и предсказанное им квантовое испарение малых черных дыр [30, 31] для большинства физиков были совершенно неожиданными¹⁾. Это открытие вызвало большой интерес. Резко возросло число работ, где наряду с изучением различных (главным образом астрофизических) следствий квантового испарения и взрыва малых черных дыр тщательно и разносторонне анализируются принципиальные вопросы, связанные с самим явлением. Эти вопросы касаются главным образом построения квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени, которая включала бы в себя задачу определения и интерпретации вакуумного состояния и вычисление ло-

¹⁾ Сам Хокинг изложил историю этого открытия в популярной статье [32]. Как и любое другое открытие, оно было в какой-то мере подготовлено предшествующими исследованиями: см., например, работы Зельдовича [33, 34], Старобинского [35], Мизнера [36] и Унру [37], в которых было указано на возможность квантового рождения частиц во вращающихся черных дырах; Марков [38] обратил внимание на то, что при учете квантовых процессов теорема Хокинга о возрастании площади поверхности черных дыр может нарушаться.

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

кальных наблюдаемых, например тензора энергии-импульса, эффективно описывающего поляризацию вакуума в гравитационном поле и плотность энергии-импульса рождаемых полем частиц. (См. обзоры [9, 20].) За последние три года выводы Хокинга полностью подтвердились, и было достигнуто более глубокое понимание как самого явления, так и его возможных астрофизических следствий.

Различные стороны классической (неквантовой) физики черных дыр подробно изложены в ряде книг и обзоров. Общее представление об этой области физики можно получить из обзоров [11, 12, 14, 15, 17, 18]; необходимая для чтения сборника информация об основных понятиях физики черных дыр содержится в обзоре Шьямы [28]; квантовым процессам посвящен обзор Фролова [16].

В настоящий сборник вошли статьи 1975 – 1977 гг. Сборник посвящен квантовым процессам в черных дырах и удивительной аналогии между физикой черных дыр и термодинамикой. В вступительной статье мы лишь кратко остановимся на тех сторонах физики черных дыр, которые непосредственно связаны с этой тематикой и наиболее интенсивно развивались последние три года. В соответствии с этим библиографический указатель данной статьи ни в коей мере не претендует на полноту, но мы надеемся, что основные работы по затрагиваемым проблемам в нем отражены.

КВАНТОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

Изучая задачу об устойчивости вакуума в гравитационном поле массивного тела, коллапс которого приводит к образованию черной дыры, Хокинг обнаружил, что черная дыра становится источником стационарного теплового излучения.

Излучение возникает вследствие квантового процесса рождения пар в гравитационном поле черной дыры. Наглядно этот процесс можно представить себе следующим образом. В вакууме спонтанно возникают пары виртуальных частиц, которые в отсутствие внешнего поля вновь аннигилируют через время τ , связанное с энергией пары E соотношением неопределенности $\tau \sim \hbar/E$. Если при наличии внешнего поля виртуальные частицы пары разойдутся на такое расстояние, что совершенная внешним полем работа будет больше или порядка E , то возможно превращение пары виртуальных частиц в пару реальных частиц. В электростатическом поле частицы пары обладают разными зарядами, и как за пространственное разделение

частиц, так и за совершение работы ответственно напряженность поля. Специфика процесса рождения пар в гравитационном поле заключается в том, что оно на обе частицы действует одинаково (принцип эквивалентности), и за эффект пространственного разделения частиц пары отвечает приливное взаимодействие, которое описывается тензором кривизны и существенно связано с неоднородностью поля. Одна из виртуальных частиц пары, возникшей вблизи горизонта снаружи от него, может попасть внутрь горизонта и занять состояние с отрицательной энергией. Тогда другая частица может уйти на бесконечность, обладая положительной энергией. В соответствии с этой картиной существует поток положительной энергии на бесконечности и поток отрицательной энергии через поверхность горизонта внутрь черной дыры. При этом масса черной дыры уменьшается и, следовательно, уменьшается поверхность ее горизонта — происходит квантовое испарение черной дыры. Характерная температура θ излучения черной дыры с массой M равна $\theta = \hbar c^3 / 8 \pi G M$. Если скорость изменения гравитационного радиуса $R_g = 2 G M / c^2$ гораздо меньше скорости света c , уменьшение массы приведет к повышению эффективной температуры черной дыры со временем [43] — мощность излучения Хокинга увеличится, и по сути дела последний этап квантового испарения будет представлять собой взрыв. Характеристики этого взрыва (длительность, общая выделяемая энергия и средняя энергия излучаемых частиц) существенно зависят от особенностей сильного взаимодействия частиц при высоких энергиях и спектра масс элементарных частиц.

Излучение Хокинга не только обладает тепловым спектром, но, более того, все корреляционные функции, характеризующие его, совпадают с соответствующими величинами для чернотельного излучения [39, 44 — 48]. Иначе говоря, при любых измерениях излучение от черной дыры нельзя отличить от излучения черного тела, обладающего температурой $\theta = \kappa / 2 \pi$, т.е. оно описывается *равновесной* матрицей плотности¹⁾. Неизбежно возникает целый ряд вопросов,

¹⁾ Вылетая на бесконечность, частицы, рожденные черной дырой, сначала будут рассеиваться на ее статическом гравитационном поле, что несколько исказит тепловой спектр. Если черную дыру поместить в термостат с излучением или газом свободных частиц при температуре, равной эффективной температуре черной дыры, то система будет находиться в (неустойчивом) равновесии; частицы, падающие в черную дыру, прежде чем пересечь горизонт событий так же рассеиваются на статическом гравитационном поле, как и частицы, вылетающие из черной дыры. Относительно равновесия черной дыры с газом взаимодействующих частиц см. работу [49].

связанных с тепловым характером излучения Хокинга. Прежде всего, как из первоначально чистого (вакуумного) состояния возникает смешанное состояние, описываемое матрицей плотности? Почему она совпадает с матрицей плотности для равновесного теплового излучения? Как из простых соображений можно понять характер зависимости эффективной температуры излучения от массы черной дыры?

Парадоксальный на первый взгляд факт появления матрицы плотности легко объяснить, если вспомнить, что образование черной дыры связано с возникновением горизонта событий. Поэтому если для описания начального состояния требовалось задать лишь состояния падающих (входящих) частиц, то для описания конечного состояния уже нужно знать состояния не только частиц, вылетающих на бесконечность, но и частиц, падающих в черную дыру. Любые измерения вдали от черной дыры зависят от состояний *вылетающих* частиц. При вычислении средних значений от любых наблюдаемых, зависящих только от состояний вылетающих частиц, производится суммирование по ненаблюдаемым состояниям частиц, *падающих* в черную дыру, и вследствие этого возникает матрица плотности. Поэтому причина возникновения матрицы плотности при описании излучения от черной дыры на бесконечности та же самая, что и причина появления матрицы плотности в обычной квантовой механике, когда, имея систему в некотором чистом состоянии, мы интересуемся описанием результатов измерения в некоторой ее подсистеме. Крайне важно, что в результате суммирования по ненаблюдаемым состояниям частиц, падающих в черную дыру, соответствующая матрица плотности не зависит от конкретного определения вакуума и понятия частицы в сильном гравитационном поле в окрестности горизонта событий [39].

На наш взгляд, при выяснении физической причины теплового характера матрицы плотности, описывающей излучение от черной дыры, существует довольно привлекательная возможность связать ее с фундаментальным свойством гравитационного взаимодействия — принципом эквивалентности [50]. Вероятность рождения пары частиц с энергией E во внешнем статическом (необязательно гравитационном) поле можно оценить следующим образом. Вероятность того, что соответствующие виртуальные частицы пары находятся на расстоянии l друг от друга, пропорциональна $\exp(-E/(\hbar c l))$. Предположим, что напряженность поля равна Γ и e — константа взаимодействия частицы с полем. Если на расстоянии l_0 при разделении час-

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

тиц поле совершает работу $e\Gamma l_0 = E$, то виртуальные частицы могут стать реальными и вероятность рождения подобной пары пропорциональна величине $\exp[-E/(kT)]$. Нетрудно заметить, что эта вероятность имеет тепловой (больцмановский) вид только в том случае, когда расстояние $l_0 = E/e\Gamma$ не зависит от энергии E . Это возможно только тогда, когда константа взаимодействия частицы с полем пропорциональна полной энергии частицы (инерционной массе).

Именно это свойство, известное как принцип эквивалентности, справедливо в случае гравитационного взаимодействия. Важно отметить, что квантовый процесс рождения частиц в статическом гравитационном поле существенно нелокален [51]. Поэтому высказываемые иногда утверждения о том, что принцип эквивалентности запрещает рождение частиц в гравитационном поле, поскольку при переходе в падающую систему отсчета это поле можно локально исключить, необоснованны.

Характер зависимости эффективной температуры от массы черной дыры можно было бы вывести из соображений размерности. В рассматриваемой задаче гравитационное поле считается заданным внешним классическим полем, на фоне которого происходят процессы рождения, и имеется только одна характерная величина с размерностью длины — гравитационный радиус. Поэтому характерная длина волны излучения $\lambda \sim R$. Это соотношение приводит к правильному (с точностью до коэффициента) выражению для характерной температуры излучения. (Другая возможная величина той же размерности — планковская длина $l_p = \sqrt{\hbar G/c^3}$ — характеризует размер области, в которой квантовые флуктуации гравитационного поля уже нельзя считать малыми; она обычно возникает в задачах, когда квантуется гравитационное поле.)

При вычислении излучения Хокинга возникает также несколько более формальных вопросов, связанных с применением аппарата квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени. Прежде всего отметим, что при наличии сильного гравитационного поля известная трудность связана с определением вакуумного состояния и введением понятия частицы. Поэтому естественно возникает вопрос: насколько сильно зависит результат Хокинга от того или иного выбора вакуума в гравитационном поле? Оказывается, что в задаче о нахождении потока энергии от черной дыры, образующейся при коллапсе тела, для получения результата по существу не нужно делать никаких предположений о свойствах вакуума в сильном поле. Причину этого

проще всего понять, если ограничиться рассмотрением физически наиболее важного случая, когда рождаются только безмассовые частицы. Для однозначного определения начального и конечного состояний (понятия падающей и вылетающей частиц) не нужно, чтобы внешнее поле до и после некоторого момента времени отсутствовало, а требуется лишь, чтобы все частицы при своем движении (как в отдаленном прошлом, так и в отдаленном будущем) попадали в область, где этим внешним полем можно пренебречь. Для таких асимптотически свободных частиц можно ввести хорошо определенные *in*- и *out*-состояния. Когда пространство-время асимптотически-плоское, можно ввести понятие асимптотической энергии, связанное с наличием асимптотических симметрий, и развить процедуру квантования (в частности, определить вакуумное состояние), используя только асимптотики (образы) полей и наблюдаемых на бесконечности. (Более подробно см. в обзоре [9].) В случае когда в асимптотически-плоском пространстве образуется черная дыра, соответствующая *S*-матрица, описывающая состояния вылетающих частиц, заменяется на матрицу плотности, причем из-за суммирования по ненаблюдаемым состояниям частиц, падающих в черную дыру, эта матрица плотности хорошо определена и не зависит от произвола в определении вакуума на поверхности горизонта.

Конкретный выбор вакуумного состояния в области с сильным гравитационным полем (в частности, определение вакуума на горизонте) оказывается важным при рассмотрении задачи о квантовых процессах в гравитационном поле "вечной" (*eternal*) черной дыры, т.е. в пустом пространстве-времени, описываемом геометрией Крускала. В этом случае, помимо горизонта будущего H^+ , имеется горизонт прошлого H^- , и квантовая задача становится определенной только после задания начального состояния на этой поверхности. Естественно, что различные выборы состояния на горизонте прошлого H^- приводят к различным результатам при вычислении потока частиц на бесконечности. Этим, в частности, объясняется наличие двух противоположных суждений, а именно: 1) вечная черная дыра излучает точно так же, как и черная дыра, образовавшаяся в результате коллапса [52, 53]; 2) излучение от вечной черной дыры полностью отсутствует [54 — 58]. Выбор вакуумного состояния на H^- , приводящий к отсутствию потока частиц на бесконечности (η -вакуум Бульвара), соответствует, по-видимому, физически нереализуемой ситуа-

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

ции [41, 53]. Анализ различных определений вакуума на H^- можно найти в работе [59].

Задача о рождении частиц в гравитационном поле вечной черной дыры представляет интерес главным образом из-за своей тесной связи с задачей о рождении частиц в черной дыре, возникающей в результате коллапса. При описании геометрии пространства-времени сферически-симметричного коллапсирующего тела метрика пространства-времени внутри коллапсирующего тела сшивается (с соблюдением определенных граничных условий) с внешней метрикой, совпадающей с *частью* полной метрики Крускала. Сама по себе *полная* метрика Крускала, по-видимому, не может встретиться при описании правдоподобной физической ситуации ¹⁾.

Поэтому, в частности, важен результат Унру [53]. Он показал, что если для определения вакуума на H^- разбить частоты на положительные и отрицательные, используя аффинный параметр ²⁾ вдоль образующих горизонта H^- , то на бесконечности будет поток излучения, характеристики которого совпадают с характеристиками излучения Хокинга. Соответствующий вакуум на H^- получил название ξ -вакуума.

При построении квантовой теории в искривленном пространстве-времени привлекателен общий подход, предложенный в работе Хартля и Хокинга [52]. Для определения фейнмановской функции Грина в гравитационном поле черной дыры (эта задача тесным образом связана с задачей определения вакуума) авторы использовали ее представление в виде интеграла по путям. С помощью перехода от псевдоевклидова к евклидову пространству им удалось доопределить интеграл по путям и фиксировать класс путей, по которым производится интегрирование. Этот подход приводит к обычному результату Хокинга для излучения от черной дыры, образующейся при коллапсе. В случае

¹⁾ Вопрос о том, что является источником для полной метрики Крускала, обсуждается, например, в работе [17]. Отметим также, что пространственноподобная сингулярность $r = 0$ в полном пространстве-времени Крускала приводит, по-видимому, к неустойчивости этой метрики по отношению к процессам аккреции вещества и квантовому процессу рождения частиц вблизи $r = 0$ точно так же, как это имеет место в случае белых дыр [61, 62].

²⁾ Отметим, что и в общем случае для произвольной световой поверхности можно использовать аффинный параметр для однозначного определения положительно- и отрицательно-частотных функций. Соответствующее понятие \mathcal{L} -вакуума было введено и проанализировано в работе [60].

вечной черной дыры используемая процедура доопределения интеграла по путям эквивалентна выбору на горизонте H^- ξ -вакуума Унру.

Остановимся еще на одном важном вопросе, который неизбежно возникает при более внимательном изучении процесса рождения частиц в черной дыре, образующейся в результате коллапса. Это вопрос о том, где рождаются частицы, приводящие к излучению Хокинга. В принципе возможны две существенно различные точки зрения. Согласно одной из них [56, 63, 64], за рождение частиц ответственна переменная составляющая гравитационного поля коллапсирующего тела, и поэтому считают, что все частицы излучения рождаются вблизи поверхности коллапсирующего тела. В этом случае вдоль поверхности горизонта событий распространялся бы поток бесконечной плотности (вычисленной в локально падающей системе отсчета) энергии, что делало бы недопустимым пренебрежение обратным влиянием рожденных частиц на метрику коллапсара. Подобный учет мог бы привести к выводу, что черная дыра в этом случае вообще не образуется.

Другая точка зрения (которой придерживается, в частности, сам Хокинг) состоит в том, что частицы рождаются не вблизи поверхности коллапсирующего тела, а в статическом гравитационном поле образовавшейся черной дыры равномерно вдоль поверхности горизонта. В этом случае для черных дыр с массой $M \gg M_p = \sqrt{\hbar c/G} \approx 10^{-5}$ г учет обратного влияния приводит к медленному изменению параметров черной дыры.

Чтобы отдать предпочтение той или иной точке зрения, необходимо исследовать вопрос о локализации процессов рождения частиц в поле черной дыры. Отметим, что характерная длина волны излучения сравнима с размером черной дыры. Это указывает на то, что квант излучения формируется в области пространства с размерами порядка размеров черной дыры, и локализовать место рождения кванта *в пространстве* с большей точностью невозможно. С другой стороны, длительность существования черной дыры обычно гораздо больше, чем характерный период λ/c , и поэтому задача о локализации процессов рождения частиц *во времени* (образуются ли все частицы сразу, в момент пересечения поверхностью коллапсирующего тела гравитационного радиуса, или равномерно вдоль поверхности горизонта) допускает решение.

В работах [60, 65] анализируется эта проблема и приводится ряд аргументов в пользу второй точки зрения. Более полную информацию можно получить, непосредственно вычисляя тензор энергии-

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

импульса частиц, рождаемых в гравитационном поле черных дыр. При подобных вычислениях возникают трудности из-за появления расходимостей, соответствующих бесконечной плотности энергии нулевых вакуумных колебаний. (Более подробное обсуждение этого вопроса содержится в статьях 2 и 6 настоящего сборника.) Используя определенную процедуру регуляризации, удается получить осмысленное конечное выражение для тензора энергии-импульса. Проведенный анализ, содержащийся, например, в работах [40 — 42], указывает на то, что соответствующий тензор энергии-импульса, вычисленный в локально падающей системе отсчета, остается конечным на горизонте событий. Поэтому в настоящее время есть все основания считать, что правильна точка зрения Хокинга и частицы рождаются не вблизи поверхности коллапсирующего тела, а в статическом гравитационном поле вдоль поверхности горизонта. Заметим также, что при анализе процедуры регуляризации выясняется, в частности, что иногда оказывается невозможным сохранить инвариантность перенормированных величин относительно *всех преобразований*, оставляющих инвариантными соответствующие формальные величины до перенормировки. С этим свойством (получившим название "аномалий") впервые столкнулись в физике элементарных частиц (аномалии Адлера [66]). При вычислении регуляризованных выражений для тензора энергии-импульса безмассовых частиц в гравитационном поле оказывается невозможным сохранить одновременно требования общей ковариантности и конформной инвариантности. Соответствующая конформная аномалия приводит к тому, что след тензора энергии-импульса $< 0 | T^\alpha_\alpha | 0 >$ для конформно-инвариантной теории может быть отличен от нуля [40, 41, 67 — 71]. Интересная связь конформных аномалий с эффектом Хокинга обсуждается в работе [41].

ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

То, что черная дыра излучает как нагретое до температуры $\theta = \kappa/2\pi$ черное тело, оказалось в полном соответствии с неожиданной на первый взгляд аналогией между физикой черных дыр и термодинамикой [72 — 74]. Более того, обладая известной смелостью, можно было бы предсказать этот результат за несколько лет до работы Хокинга. Термодинамическая аналогия была развита при анализе возможности извлечения энергии из черных дыр. В полном соответствии с тем, что закон возрастания энтропии запрещает полное прев-

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

ращение тепловой энергии, заключенной в нагретом теле, в полезную работу, закон возрастания площади поверхности черной дыры (доказанный Хокингом [75]) запрещает построение "вечного двигателя второго рода", который превращал бы энергию невращающейся черной дыры в полезную работу без какого-либо изменения состояния окружающих тел. В этой аналогии роль энтропии играет величина, пропорциональная площади поверхности черной дыры.

Развивая эту аналогию, удалось установить, что в физике черных дыр имеют место все четыре закона, соответствующие началам термодинамики. С принципиальной точки зрения важно, что можно проследить не только формальное сходство основных феноменологических законов, но также и более глубокую связь между физикой черных дыр и термодинамикой, которая обнаруживается при информационном подходе. Как в термодинамике, так и в физике черных дыр после перехода в равновесное состояние система полностью "забывает" о своем прошлом. Потеря информации о внутреннем состоянии системы, связанная с наличием у черной дыры сильного гравитационного поля, не "выпускающего" никаких сигналов наружу, приводит к тому, что при заданных внешних параметрах стационарной черной дыры ее внутреннее состояние полностью не определено, и мера этой неопределенности описывается эффективной энтропией черной дыры (по этому поводу более подробно см. работы [39, 76 — 78]).

Формально близкая связь физики черных дыр с термодинамикой наиболее отчетливо проявляется при переходе к евклидовой формулировке [52, 79]. После введения мнимого времени $\tau = it$ в решении, описывающем статическую черную дыру, соответствующая регулярная метрика в евклидовом четырехмерном пространстве становится периодической по координате τ с периодом, равным $2\pi/\kappa$ (κ — поверхностная гравитация соответствующей черной дыры). Если теперь вспомнить, что квантовая статистика системы частиц формально полностью эквивалентна теории поля в четырехмерном евклидовом пространстве, в котором по одной из координат существует периодичность с периодом, равным $\beta = 1/T$ (T — температура системы), то мы увидим, что с формальной точки зрения появление статистических свойств в физике черных дыр отнюдь не случайно.

Евклидова формулировка физики черных дыр в настоящее время интенсивно исследуется в связи с проблемой квантования гравитационного поля, и, по-видимому, на этом пути могут быть получены

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

новые интересные результаты, которые, в частности, сделают еще более отчетливой связь между физикой черных дыр и термодинамикой.

ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ СНАРУЖИ И ВНУТРИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Черная дыра образуется в результате гравитационного коллапса, когда массовое тело сжимается до размера порядка его гравитационного радиуса. При этом гравитационное поле усиливается до такой степени, что препятствует выходу из этой области наружу света и любых других сигналов. Любое физическое поле, обладая энергией, также притягивается черной дырой. Если источник такого поля, расположенный, например, на коллапсирующем теле, попадает в черную дыру, а сила давления, связанная с компонентами тензора натяжения этого поля, не способна скомпенсировать силу гравитационного притяжения¹⁾, то втягивание этих полей внутрь черной дыры, сопровождаемое излучением части энергии наружу в виде волн соответствующего поля, приводит к (быстрому) исчезновению поля снаружи от черной дыры ("выпадению волос"). Процесс "выпадения волос" подробно обсуждается в книге [4], где можно найти ссылки на соответствующие работы. В результате этого процесса черная дыра может сохранить только те характеристики, которые она не способна сбросить при излучении (массу, угловой момент, электрический заряд). Теоремы, доказанные в работах [19, 75, 81, 82], позволяют заключить, что образующаяся стационарная черная дыра является (заряженной) керровской черной дырой.

Та же причина, которая приводит к "выпадению волос" вне черной дыры, вызывает внутри черной дыры "притягивание волос" к сингулярности $r = 0$. Поэтому, если источник поля находится на коллапсирующем теле, при удалении от границы этого тела поле в окрестности $r = 0$ вымирает [83].

Когда источники поля покоятся снаружи черной дыры [83, 84], то из-за втягивания в черную дыру силовые линии "фокусируются" около особенности $r = 0$. Интересно заметить [84], что, когда вне черной дыры существует источник массивного векторного поля, эф-

¹⁾ Для сферически-симметричной черной дыры условие компенсации имеет вид $T^t_t = T^r_r$ [80]. Это условие, в частности, обеспечивает выполнение теоремы Биркгофа, и сферически-симметричное поле в этом случае должно быть статическим.

фekt фокусировки приводит к следующему виду тензора энергии-импульса около особенности $r = 0$:

$$T_{\nu}^{\mu} \approx \text{diag} \left(\frac{G}{r^4}, \frac{G}{r^4}, -\frac{G}{r^4}, -\frac{G}{r^4} \right);$$

по-видимому, это указывает на то, что данное поле может изменить структуру пространства-времени около особенности (например, сделать ее типа рейсснер-нордстремовской).

Трудно, однако, надеяться, что в результате учета каких-либо реальных классических взаимодействий можно избавиться от сингулярностей. Основание тому — строгие теоремы, доказанные в работах Пенроуза и Хокинга [85, 86]. В настоящее время большие надежды возлагают на учет квантовых процессов в гравитационном поле около особой точки и на учет квантового характера самого гравитационного поля. В этой связи значительный интерес представляют недавние результаты Вилковисского и Фрадкина [87], которые свидетельствуют в пользу того, что теория квантовой гравитации, вероятно, является "асимптотически свободной", и в этом смысле она ближе к теории Янга — Миллса, чем к квантовой электродинамике. Данные результаты позволяют надеяться, что на малых расстояниях (при больших импульсах) константа гравитационного взаимодействия эффективно уменьшается и, следовательно, притяжение, вызываемое гравитационным полем, ослабевает. Это может привести к ослаблению (а возможно, даже и к отсутствию) сингулярности при коллапсе тел. В пользу этого также свидетельствует то, что в квантовой теории условие положительности плотности энергии нарушается, и поэтому строгие теоремы, использующие в той или иной форме это предположение, перестают работать.

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ВО ВСЕЛЕННОЙ. ЗВЕЗДНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

При исследовании вопросов, связанных как с гипотезой существования черных дыр во Вселенной, так и с ее возможными астрономическими следствиями, следует иметь в виду, что свойства черных дыр, их устойчивость, характер процессов, приводящих к их образованию, и сама возможность их наблюдений существенно зависят от массы M черной дыры. Гравитационный радиус R_g и характерная

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

плотность вещества в момент образования черной дыры ρ_g следующим образом связаны с массой:

$$R_g = \frac{2 GM}{c^2} \approx 1,5 \cdot 10^{-28} \text{ (Мг) см},$$

$$\rho_g \approx \frac{M}{R_g^3} \approx 10^{83} \text{ (Мг)}^{-2} \text{ г/см}^3.$$

Черные дыры с массой, меньшей чем $M_p \approx 10^{-5} \text{ г}$, нельзя описывать в рамках классической теории гравитации, так как квантовые флуктуации метрики в области $l \sim l_p = 2GM_p/c^2 \approx 10^{-33} \text{ см}$ уже нельзя рассматривать как малые¹⁾. Основные характеристики черных дыр в возможном диапазоне масс удобно представить в виде таблицы.

Звездные черные дыры могут образовываться в результате коллапса выгоревших и потерявших устойчивость звезд. Мы лишь кратко остановимся на свойствах этих черных дыр, поскольку проблемам коллапса звезд, аккреции вещества на черные дыры и возможности обнаружения этих черных дыр посвящена многочисленная литература (см., например, книги [2, 4, 6, 8], обзоры [14, 15, 17, 18, 21, 23, 24] и статьи, ссылки на которые в них содержатся).

Расчеты показывают, что обычно последний этап эволюции звезд с массой, в несколько раз превосходящей массу Солнца, сопровождается взрывом (вспышкой Сверхновой), в результате которого звезда может сбросить значительную часть своей оболочки. Если масса остатка Сверхновой превосходит величину M_n , равную максимально допустимой массе устойчивой нейтронной звезды, то в результате коллапса этого остатка может возникнуть черная дыра. Для невращающихся нейтронных звезд со слабым магнитным полем значение M_n существенно зависит от уравнения состояния вещества при плотности, превышающей ядерную. Если предположить, что допустимые уравнения состояния не приводят к скорости звука, превосходящей скорость света, то, как показали Роадес и Руффини [89], предельная масса нейтронной звезды не превосходит величины $3 - 4 M_\odot$, где M_\odot — масса Солнца. (Ограничения на предельную массу нейтронной

¹⁾ Если бы в природе существовала фундаментальная длина $l_f > l_p$, то вместо 10^{-5} г для минимального значения массы черных дыр естественным образом получилось бы значение $M_f = c^2 l_f / 2G \approx 10^{-5} (l_f / 10^{-33} \text{ см}) \text{ г}$ [88].

Таблица

Характеристики / Черные дыры	Элементарные ("максимоны")	Малые		Звездные	Массивные	Сверхмассивные
		микроскопические	макроскопические			
Масса, г	10^{-5}	$10^{-5} - 10^{15}$	$10^{15} - 10^{33}$	$5 \cdot 10^{33} - 5 \cdot 10^{35}$	$10^{36} - 10^{37}$	10^{41}
Возможные условия образования	Коллапс неоднородностей в планковский момент времени (?); конечное состояние при распаде малых черных дыр (?); промежуточное состояние в элементарных частицах (?)	Коллапс неоднородностей вещества на ранних этапах развития Вселенной		Коллапс звезд	Звездные скопления	Ядра активных галактик и квазаров
Возможный способ обнаружения		По продуктам распада при квантовом взрыве		По излучению при аккреции вещества		
Время жизни, с	?	$\leq 10^{-28} (M \text{ г})^3$		Больше современного возраста Вселенной (практически устойчивы)		

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

звезды при других предположениях о свойствах уравниения состояния и в теориях гравитации, отличных от эйнштейновской, а также ссылки на более ранние работы содержатся в статьях [90 – 95].) Численные расчеты (см., например, работы [96, 97]) указывают на то, что при отсутствии вращения в том случае, когда первоначальная масса звезды превосходила $10 M_{\odot}$ при вспышке Сверхновой может образоваться черная дыра. Вращение и сильное магнитное поле могут в принципе помешать образованию черной дыры.

Условия для наблюдения звездной черной дыры наиболее благоприятны, когда эта дыра входит в состав тесной двойной системы, вторая компонента в которой – обычная звезда. В этом случае из-за перетекания (аккреции) вещества со звезды на черную дыру вокруг последней образуется аккрецирующий диск, который может являться источником мощного рентгеновского излучения. Описание стандартной модели дисковой аккреции можно найти в обзорах [21, 23, 24].

Совместные наблюдения и исследование характеристик этого рентгеновского излучения и излучения видимой компоненты могут позволить идентифицировать подобную черную дыру в двойной системе. Среди исследованных в настоящее время компактных галактических рентгеновских источников обнаружено более десяти мощных источников, входящих в состав двойных систем. Девять из этих источников оказались рентгеновскими пульсарами (нейтронными звездами в двойной системе). В настоящее время полагают, что рентгеновский источник в созвездии Лебедя Cyg X-1 с большой степенью вероятности является аккрецирующей черной дырой в двойной системе. (Обсуждение наблюдательных данных для этого источника, полученных к началу 1977 г., и сравнение с теоретическими моделями, а также дальнейшие ссылки можно найти в обзоре [26]).

МАССИВНЫЕ И СВЕРХМАССИВНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Наряду с возможностью существования звездных черных дыр не исключена также возможность образования черных дыр со значительной большей массой. Массивные черные дыры (с массой $M \approx 10^2 - 10^3 M_{\odot}$) могли бы существовать в звездных скоплениях. Относительно недавно гипотеза о массивных черных дырах в звездных скоплениях привлекла к себе внимание в связи с открытием источников мощных вспышек рентгеновского излучения, которые, как первоначально полагали, связаны со звездными скоплениями. Более поздние наблюде-

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

ния и более тщательная их обработка показали, что только малая часть ($< 20\%$) этих источников совпадает со звездными скоплениями. Масса черных дыр в звездных скоплениях (если они существуют) не может, по-видимому, превосходить $10^3 - 10^4 M_{\odot}$, так как в противном случае она заметно влияла бы на распределение звезд в скоплении и на эволюцию самого скопления.

Привлекательна идея объяснить природу активности ядер галактик и квазаров наличием в них сверхмассивной (с массой $M \gtrsim 10^8 M_{\odot}$) черной дыры [100, 101]. Вокруг такой дыры при падении на нее межзвездного газа мог бы возникнуть аккрецирующий диск, максимум излучения которого лежит в ультрафиолетовом или оптическом диапазонах [24]. Однако по крайней мере в простейшем варианте эта модель встречается с рядом трудностей [13, 22].

МАЛЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

В настоящее время возникновение малых черных дыр по всей видимости невозможно. Однако существование крайне высокой плотности на ранних этапах развития Вселенной приводит к тому, что при некоторых условиях подобные малые черные дыры могли бы образовываться в прошлом из локальных неоднородностей распределения вещества [102 – 104]. Подобные черные дыры получили название первичных (или реликтовых) черных дыр. Процесс образования черных дыр с массой M преимущественно происходит в момент времени, когда средняя плотность вещества во Вселенной имеет порядок $\rho \sim c^6 / G^3 M^2$. Число образующихся черных дыр главным образом зависит от уравнения состояния вещества и от характера неоднородностей. Чем жестче уравнение состояния и чем меньше средняя амплитуда неоднородностей, тем меньше образуется черных дыр [105 – 108].

Если справедливо обычное (классическое) рассмотрение вплоть до планковского момента времени, когда плотность вещества достигает величины $\rho_p \sim 10^{93}$ г/см³, этот процесс может приводить к образованию малых черных дыр с массой вплоть до $M_p = 10^{-5}$ г.

Поскольку температура хокинговского излучения от черной дыры обратно пропорциональна ее массе [$\theta \approx 10^{26} (M \text{ г})^{-1}$ К], процесс квантового распада оказывается существенным только для микроскопических ($M < 10^{15}$ г) черных дыр. В результате квантового испарения реликтовые черные дыры с массой $M < 5 \cdot 10^{14}$ г к настоящему времени должны были бы полностью распасться. Поэтому на первый

ВСТУПИТЕЛЬНАЯ СТАТЬЯ

взгляд из современных наблюдательных данных невозможно получить какие-либо ограничения на их число в момент образования. Однако оказывается, что если бы этих дыр было достаточно много, то продукты их распада могли бы влиять на спектр реликтового излучения [110], на синтез гелия [111] и дейтерия [112] и на наблюдаемую энтропию, приходящуюся на один барион [110, 113], и поэтому наблюдения позволяют наложить очень сильное ограничение на допустимое число реликтовых черных дыр в широком диапазоне масс ($M < 10^{15}$ г).

Более массивные черные дыры (с массой $M \sim 5 \cdot 10^{14}$ г) могли бы дожить до наших дней и их распад в настоящее время мог бы привести к наблюдаемым явлениям (вспышки γ -излучения [106, 114 — 116] или оптического и радиоизлучения [117, 118]). Отсутствие указаний в современных наблюдениях на эти явления позволяют заключить, что и в этом диапазоне масс при образовании черных дыр в них могла попасть только очень малая ($10^{-22} - 10^{-26}$) доля общей массы вещества во Вселенной.

Для макроскопических малых черных дыр ($M > 10^{15}$ г) эффект Хокинга практически несуществен, и такие черные дыры остаются практически неизменными с самого момента их образования. (Аккреция окружающего вещества на них не может увеличить их массу, по-видимому, более чем на порядок [104, 119].) Совокупность подобных черных дыр можно рассматривать как своеобразный газ нерелятивистских частиц, и при расширении Вселенной плотность энергии этого газа падает по закону a^{-3} . Отличие этого закона от обычного закона для изменения плотности энергии излучения a^{-4} приводит к тому, что даже если в настоящее время средняя плотность вещества, заключенного в подобные черные дыры, сравнима со средней плотностью вещества во Вселенной, то в отдаленном прошлом в момент образования этих черных дыр в них была заключена лишь крайне малая доля вещества, примерно равная a/a_0 , где a и a_0 — соответственно масштабные факторы в момент образования черной дыры и в настоящее время [102]. Все это указывает на то, что отклонения Вселенной от однородности на ранних этапах были крайне малы.

Отметим здесь еще один важный с принципиальной точки зрения аспект физики малых черных дыр, состоящий в своеобразной взаимосвязи макро- и микрофизики. Обладая макроскопической массой (скажем, $M \sim 10^{15}$ г), эти дыры могут иметь микроскопически малый размер $l \sim 10^{-13} \cdot (M/10^{15} \text{ г})$ см, сравнимый с размером элементарной

частицы. Характеристики хокинговского излучения, при котором выделяется макроскопически большое количество энергии, существенно зависят от спектра масс и характера взаимодействия элементарных частиц при высоких энергиях [106, 120]. С этой особенностью физики малых черных дыр связана интересная новая возможность получать информацию о физике микромира при астрофизическом поиске черных дыр. В частности, если в природе имеется фундаментальная длина l_f , то, по-видимому, невозможно образование черных дыр с массой $M < 10^{27} (l_f/10^{-17} \text{ см})^2 \text{ г}$ [109]. Другой, быть может, еще более яркий пример возможной взаимосвязи макро- и микрофизики в явлениях, где существенно гравитационное взаимодействие, дает рассмотренная в работах [121 – 125] классическая модель заряженной частицы ("фридмона"), в которой макроскопически большой заряженный полузамкнутый мир для внешнего наблюдателя может проявляться в виде объекта с микроскопически малым зарядом и размером.

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ ("МАКСИМОНЫ")

Вопрос о возможности существования устойчивых элементарных черных дыр (максимонов), обсуждавшийся в работах Маркова [126, 127] и Хокинга [103], в настоящее время является, по-видимому, открытым. При разумных предположениях о спектре флуктуаций плотности следовало бы ожидать образования в планковский момент времени большого количества подобных черных дыр, и если допустить, что эти черные дыры устойчивы и не взаимодействуют друг с другом, то можно прийти к противоречию с наблюдательными ограничениями на их допустимую плотность в настоящее время. Однако при подобном рассуждении полностью игнорируется специфический квантовый характер подобных объектов. Учет квантовогравитационных процессов может, в частности, существенно повлиять на вероятность образования этих дыр.

Элементарные черные дыры могут, по-видимому, сыграть важную роль в физике элементарных частиц [122]. При вычислении собственной энергии частицы обычно учитывают вклад промежуточных состояний с произвольно большой энергией, что приводит к появлению известных расходимостей. Учет гравитационного взаимодействия соответствующих виртуальных частиц и возможности появления виртуальных элементарных черных дыр в промежуточном состоянии мо-

ЛИТЕРАТУРА

жет привести к устранению этих расходимостей. В последние годы эта идея получила своеобразное интересное развитие в работах [128 — 132], в которых обсуждается инстантонный характер решений, описывающих черные дыры, при продолжении их в евклидову область и возможный вклад подобных решений в амплитуды квантовых процессов.

В настоящее время в физике черных дыр проблем, наверное, не меньше, чем решений. Именно это и привлекает к ней столь сильное внимание. Мы надеемся, что статьи, вошедшие в сборник, помогут читателю получить представление об этой "горячей точке" науки.

ЛИТЕРАТУРА

Монографии

1. Вейнберг С., Гравитация и космология, "Мир", 1975.
2. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Теория тяготения и эволюция звезд, "Наука", 1971.
3. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Строение и эволюция Вселенной, "Наука", 1975.
4. Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж., Гравитация, "Мир", 1977.
5. Пенроуз Р., Структура пространства-времени, "Мир", 1972.
6. Рис М., Руффини Р., Уилер Дж., Черные дыры, гравитационные волны и космология, "Мир", 1977.
7. Хокинг С., Эллис Дж., Крупномасштабная структура пространства-времени, "Мир", 1977.
8. Уилер Дж., Гаррисон Б., Вакано М., Торн К., Теория гравитации и гравитационный коллапс, "Мир", 1967.

Работы обзорного характера

9. Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П., ЭЧАЯ, 9, 147 (1978).
Квантовая теория поля в асимптотически плоском пространстве-времени.
10. Зельдович Я.Б., УФН, 123, 487 (1977).
Тяготение, заряды, космология и когерентность.
11. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Старобинский А.А., Природа, № 1, 34 (1976).
Черные и белые дыры.
12. Марков М.А., УФН, 111, 3 (1973).
Глобальные свойства вещества в коллапсированном состоянии ("черные дыры").
13. Озерной Л.М., УФН, 120, 309 (1976).
Источники энергии в квазарах и ядрах галактик.
14. Пенроуз Р., УФН, 109, 355 (1973).
Черные дыры.

ЛИТЕРАТУРА

15. Торн К., УФН, **118**, 453 (1976).
Поиски черных дыр.
16. Фролов В.П., УФН, **118**, 473 (1976).
Черные дыры и квантовые процессы в них.
17. Фролов В.П., Эйнштейновский сборник, 1975, "Наука", 1978.
Черные дыры: от Эйнштейна до наших дней.
18. Шакура Н.И., Нейтронные звезды и "черные дыры" в двойных системах,
"Знание", 1976.
19. Carter B., в сборнике Black Holes, eds. C. DeWitt, B.S. DeWitt, Gordon
and Breach Sci. Publ., 1973, p. 57.
Black Hole equilibrium states.
20. DeWitt B., Phys. Repts., **19C**, 297 (1975) (Статья 2 настоящего сборника.)
Quantum field theory in curved space-time.
21. Eardley D.M., Press W.H., Annual Rev. Astron. Astrophys., **13**, 381 (1975).
Astrophysical processes near black holes.
22. Гинзбург В.Л., Озерной Л.М., Astron. Space Sci., **50**, 23 (1977).
On the nature of quasars and active galactic nuclei.
23. Новиков И.Д., в сборнике Astrophysics and gravitation, Proc. 16th Solway
Conference on Physics, Univ. Bruxelles, 1974, p. 317.
Search for observational evidence for black holes.
24. Novikov I.D., Thorne K.S., в сборнике Black Holes, eds. C. DeWitt,
B.S. DeWitt, Gordon and Breach Sci. Publ., 1973, p. 343.
Black hole astrophysics.
25. Новиков И.Д., Зельдович Я.Б., Annual Rev. Astron. Astrophys., **11**,
387 (1973).
Physical processes near cosmological singularities.
26. Oda M., Preprint ISAS, Tokyo Univ., 1977.
Cyg X-1 — a candidate of the black hole.
27. Parker L., Preprint Univ. Wisconsin-Milwaukee, 1977.
The production of elementary particles by strong gravitational fields.
28. Schiama D.W., Vistas Astron., **19**, 385 (1976). (Статья 1 настоящего сбор-
ника.)
Black holes and their thermodynamics.
29. Sexl R.U., Acta Phys. Austriaca, **B42**, 303 (1975).
Black hole physics.

Статьи

30. Hawking S.W., Nature, **248**, 30 (1974).
Black hole explosions?
31. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
Quantum particle creation by black hole.
32. Hawking S.W., Scient. American., **236**, 34 (1977).
The quantum mechanics of black holes.

ЛИТЕРАТУРА

33. Зельдович Я.Б., Письма ЖЭТФ, **14**, 270 (1971).
Генерация волн вращающимся телом.
34. Зельдович Я.Б., ЖЭТФ, **62**, 2076 (1972).
Усиление цилиндрических электромагнитных волн при отражении от вращающегося тела.
35. Старобинский А.А., ЖЭТФ, **64**, 48 (1973).
Усиление волн при отражении от вращающейся черной дыры.
36. Misner C.W., Phys. Rev. Lett., **28**, 999 (1972).
Interpretation of gravitational-wave observations.
37. Unruh W.G., Phys. Rev., **D10**, 3194 (1974).
Second quantization in Kerr metric.
38. Марков М.А., в сборнике Gravitational radiation and Gravitational collapse, ed. C. DeWitt-Morette, Dordrecht — Boston, D. Reidel, 1974, p. 106.
On black and white holes.
39. Hawking S.W., Phys. Rev., **D14**, 2460 (1976) (Статья 3 настоящего сборника.)
Breakdown of predictability in gravitational collapse.
40. Davies P.C.W., Fulling S.A., Unruh W.G., Phys. Rev., **D13**, 2720 (1976).
Energy-momentum tensor near an evaporating black hole.
41. Christensen S.M., Fulling S.A., Phys. Rev., **D15**, 2088 (1977). (Статья 6 настоящего сборника.)
Trace anomalies and the Hawking effect.
42. Fulling S.A., Phys. Rev., **D15**, 2411 (1977). (Статья 7 настоящего сборника.)
Radiation and vacuum polarization near a black hole.
43. Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П., ТМФ, **29**, 191 (1976).
Квантовое рождение частиц (эффект Хокинга) в черных дырах с переменными параметрами.
44. Parker L., Phys. Rev., **D12**, 1519 (1975).
Probability distribution of particles created by a black hole.
45. Wald R.M., Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975).
On particle creation by black holes.
46. Israel W., Phys. Lett., **57A**, 107 (1976).
Thermo-field dynamics of black holes.
47. Bekenstein J.D., Meisels A., Phys. Rev., **D15**, 2775 (1977).
Einstein A and B coefficients for a black hole.
48. Фролов В.П., Preprint 1C/77/46, Trieste, Italy (1977).
Null surface quantization and quantum field theory in asymptotically flat space-time.
49. Gibbons G.W., Perry M.J., Phys. Rev. Lett., **36**, 985 (1976).
Black holes in thermal equilibrium.
50. Гитман Д.М., Фролов В.П., Preprint 15 FIAN (1977); ЯФ, **28**, 559 (1978).
Density matrix in quantum electrodynamics, principle of equivalence and Hawking effect.

ЛИТЕРАТУРА

51. Зельдович Я.Б., в книге Magic without magic. John Archibald Wheeler.
Ed. J. Klauder, W.H. Freeman, San Francisco 1972.
The birth of particles and antiparticles in electric and gravitational fields.
52. Hartle J.B., Hawking S.W., Phys. Rev., D13, 2188 (1976). (Статья 5
настоящего сборника.)
Path integral derivation of black hole radiance.
53. Unruh W.G., Phys. Rev., D14, 870 (1976).
Notes on black holes evaporation.
54. Boulware D.G., Phys. Rev., D11, 1404 (1975).
Quantum field theory in Schwarzschild and Rindler spaces.
55. Boulware D.G., Phys. Rev., D12, 350 (1975).
Spin- $\frac{1}{2}$ quantum field theory in Schwarzschild space.
56. Boulware D.G., Phys. Rev., D13, 2169 (1976).
Hawking radiation and thin shells.
57. Меньский М.Б., Письма ЖЭТФ, 24, 561 (1976).
Рождение пар коллапсирующим телом как эффект квантовой геометрии.
58. Новиков И.Д., Препринт ИКИ № 268, 1976.
Эффекты процесса Хокинга на границе и внутри черной дыры.
59. Fulling S.A., Journ. Phys., A10, 917 (1977).
Alternative vacuum states in static space-times with horizons.
60. Волович И.В., Загребнов В.А., Фролов В.П., ТМФ, 33, 3 (1977).
Об определении вакуума в гравитационном поле: \mathcal{H} -вакуум.
61. Eardley D.M., Phys. Rev. Lett., 33, 442 (1974).
Death of white holes in the early Universe.
62. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Старобинский А.А., ЖЭТФ, 66, 1897 (1974).
Квантовые процессы в белых дырах.
63. Davies P.C.W., Proc. Roy. Soc., A351, 129 (1976).
On the origin of black hole evaporation radiation.
64. Gerlach U.H., Phys. Rev., D14, 1479 (1976).
The mechanism of blackbody radiation from an incipient black hole.
65. Unruh W.G., Phys. Rev., D15, 365 (1977).
Origin of the particles in black hole evaporation.
66. Adler S.L., Phys. Rev., 177, part 2, 2426 (1969).
Axial-vector vertex in spinor electrodynamics.
Bell J.S., Jackiw R., Nuov. Cim., 60A, 47 (1969).
A PCAC puzzle: $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ in the δ -model.
67. Deser S., Duff M.J., Isham C.J., Nucl. Phys., B111, 45 (1976).
Non-local conformal anomalies.
68. Davies P.C.W., King's College preprint, London (1976).
Stress tensor and conformal anomalies.
69. Brown L.S., Phys. Rev., D15, 1469 (1977).
Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: Scalar fields.
70. Brown L.S., Cassidy J.P., Phys. Rev., D15, 2810 (1977).
Stress-tensor trace anomaly in a gravitational metric: general theory,
Maxwell fields.

ЛИТЕРАТУРА

71. Brown L.S., Cassidy J.P., Preprint Univ. Washington, Seattle (1977).
Stress tensors and their trace anomalies in conformally flat space-times.
72. Bekenstein J.D., Phys. Rev., D7, 2333 (1973).
Black holes and entropy.
73. Bekenstein J.D., Phys. Rev., D9, 3292 (1974).
Generalized second law of thermodynamics in black hole physics.
74. Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W., Commun. Math. Phys., 31, 161 (1973).
The four laws of black holes mechanics.
75. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., 25, 152 (1972).
Black holes in general relativity.
76. Hawking S.W., Phys. Rev., D13, 191 (1976). (Статья 4 настоящего сборника.)
Black holes and thermodynamics.
77. Davies P.C.W., Mon. Not. Roy. Astr. Soc., 177, 179 (1976).
Black hole thermodynamics and time asymetry.
78. Davies P.C.W., Proc. Roy. Soc., A353, 499 (1977).
The thermodynamic theory of black holes.
79. Gibbons G.W., Hawking S.W., Phys. Rev., D15, 2752 (1977). (Статья 8 настоящего сборника.)
Action integrals and partial functions in quantum Gravity.
80. Israel W., Gen. Rel. Grav., 2, 53 (1971).
Event horizons and gravitational collapse.
81. Carter B., Phys. Rev. Lett., 26, 331 (1971).
Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom.
82. Robinson D.C., Phys. Rev. Lett., 34, 905 (1975).
Uniqueness of the Kerr black hole.
83. Дорошкевич А.Г., Новиков И.Д., Препринт ИПМ № 74 (1977).
Пространство-время и физические поля внутри черной дыры.
84. Фролов В.П., Preprint IC/77/39, Trieste, Italy (1977).
Massive vector fields and black holes.
85. Penrose R., Phys. Rev. Lett., 14, 57 (1965).
Gravitational collapse and space-time singularities.
86. Hawking S.W., Penrose R., Proc. Roy. Soc., A314, 529 (1970).
The singularities of gravitational collapse and cosmology.
87. Фрадкин Е.С., Вилков-Висский Г.А., в сборнике Abstracts of contributed papers GRS, Univ. Waterloo, Canada, 1977.
Conformal off-mass-shell extension, asymptotic freedom and hypothesis on global renormalizability in quantum gravity.
88. Гинзбург В.Л., Письма ЖЭТФ, 22, 514 (1975).
Испарение черных дыр и фундаментальная дыра.
89. Rhoades C.E., Ruffini R., Phys. Rev. Lett., 32, 324 (1974).
Maximum mass of a neutron star.
90. Dennis J.H., Lee T.H., Cohen J.M., Astrophys. Journ., 201, 462 (1975).
The maximum mass of nonrotating neutron stars.

ЛИТЕРАТУРА

91. *Chitre D.M., Hartle J.B.*, *Astrophys. Journ.*, **207**, 592 (1976).
Stationary configurations and the upper bound on the mass of nonrotating, causal neutron stars.
92. *Brecher K., Caporaso G.*, *Nature*, **259**, 377 (1976).
Obese neutron stars.
93. *Hartle J.B., Sabbadini A.G.*, Preprint Univ. Calif., Santa Barbara, TH-11, 1976.
The equation of state and bounds on the mass of non-rotating neutron stars.
94. *Joss P.C., Rappaport S.A.*, *Nature*, **264**, 219 (1976).
Observational constraints on the masses of neutron stars.
95. *Rosen J., Rosen N.*, *Astrophys. Journ.*, **202**, 782 (1975).
The maximum mass of a cold neutron star.
96. *Надежин Д.К.*, Препринт ИГМ № 98 (1975).
Физико-математическая постановка задачи о коллапсе железных звезд и метод расчета.
97. *Надежин Д.К.*, Препринт ИГМ № 106 (1975).
Гравитационный коллапс железных звезд с массами \approx и $10 M_{\odot}$.
98. *Wyller A.A.*, *Astrophys. Journ.*, **160**, 443 (1970).
Observational aspects of black holes in globular clusters.
99. *Peebles P.J.E.*, *Gen. Rel. Grav.*, **3**, 63 (1972).
Gravitational collapse and related phenomena from an empirical point of view.
100. *Lynden-Bell D.*, *Nature*, **223**, 690 (1969).
Galactic nuclei as collapsed old quasars.
101. *Lynden-Bell D., Rees M.J.*, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **152**, 461 (1971).
On quasars, dust and the galactic centre.
102. *Зельдович Я.Б., Новиков И.Д.*, *Астроном. журн.*, **43**, 758 (1966).
Гипотеза задержавшихся в расширении ядер и горячая космологическая модель.
103. *Hawking S.W.*, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **152**, 75 (1971).
Gravitationally collapsed objects of very low mass.
104. *Carr B.J., Hawking S.W.*, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **168**, 399 (1974).
Black holes in the early Universe.
105. *Carr B.J.*, *Astrophys. Journ.*, **201**, 1 (1975).
The primordial black holes mass spectrum.
106. *Carr B.J.*, *Astrophys. Journ.*, **206**, 8 (1976).
Some cosmological consequences of primordial black holes evaporation.
107. *Chapline G.F.*, *Phys. Rev.*, **D12**, 2949 (1975).
Hadron physics and primordial black holes.
108. *Надежин Д.К., Новиков И.Д., Полнарев А.Г.*, Препринт ИКИ № 347 (1977).
Гидродинамика образования первичных черных дыр.
109. *Гинзбург В.Л., Фролов В.П.*, *Письма АЖ*, **2**, 474 (1976).
Возможность существования черных дыр малой массы и фундаментальная длина.

ЛИТЕРАТУРА

110. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А., Письма ЖЭТФ, **24**, 616 (1976).
О возможности холодной космологической сингулярности и спектре первичных черных дыр.
111. Вайнер Б.В., Насельский П.Д., Письма АЖ, **3**, 147 (1977).
Наблюдаемые следствия испарения первичных черных дыр малой массы.
112. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А., Хлопов М.Ю., Чечеткин В.М., Письма АЖ, **3**, 208 (1977).
Первичные черные дыры и проблема дейтерия.
113. *Chapline G.F.*, *Nature*, **261**, 550 (1976).
Quarks in the early Universe.
114. *Chapline G.F.*, *Nature*, **253**, 251 (1975).
Cosmological effects of primordial black holes.
115. *Page D.N., Hawking S.W.*, *Astrophys. Journ.*, **206**, 1 (1976).
Gamma rays from primordial black holes.
116. *Porter N.A., Weekes T.C.*, *Astrophys. Journ.*, **212**, 224 (1977).
An upper limit to the rate of γ -ray bursts from primordial black holes explosions.
117. *Rees M.J.*, *Nature*, **266**, 333 (1977).
A better way of searching for black-hole explosions?
118. *Meikle W.P.S.*, *Nature*, **269**, 41 (1977).
Upper limits for the radio pulse emission rate from exploding black holes?
119. *Lin D.N.C., Carr B.J., Fall S.M.*, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **177**, 51 (1976).
The growth of primordial black holes in a Universe with a stiff equation of state.
120. *Carter B., Gibbons G.W., Lin D.N.C., Perry M.J.*, *Astron. Astrophys.*, **52**, 427 (1976).
Black holes emission process in the high energy limit.
121. Марков М.А., в сборнике "Труды Международного семинара по теории элементарных частиц", Варна, 1968, препринт Р2-4050 ОИЯИ (1968).
О возможности космологического подхода к теории элементарных частиц.
122. Марков М.А., Preprint IC/71/33, Trieste, Italy (1971).
Cosmology and elementary particles (Lecture notes),
123. Марков М.А., Фролов В.П., ТМФ, **3**, 1 (1970).
Метрика закрытого мира Фридмана, возмущенная электрическим зарядом. (К теории электромагнитных "Фридмонов".)
124. Марков М.А., Фролов В.П., ТФМ, **13**, 41 (1972).
О минимальных размерах частиц в общей теории относительности.
125. Марков М.А., *Ann. Phys.*, **59**, 109 (1970).
The closed Universe and laws of conservations of electric, baryon and lepton charges.
126. Марков М.А., *Suppl Progr. Theor. Phys.*, Extra Number, 85 (1965).
Can the gravitational field prove essential for the theory of elementary particles?

ЛИТЕРАТУРА

127. Марков М.А., ЖЭТФ, **51**, 848 (1966).
Элементарные частицы максимально больших масс: кварки, максимоны.
128. Delbugo R., Salam A., Phys. Lett., **40B**, 381 (1972).
The gravitational correction to PCAC.
129. Белагин А.А., Бурланков Д.Е., Phys. Lett., **58A**, 7 (1976).
The renormalizable theory of gravitation and the Einstein equations.
130. Eguchi T., Freund P.G.O., Phys. Rev. Lett., **37**, 1251 (1976).
Quantum gravity and world topology.
131. Hawking S.W., в сборнике "Proc. of 8th International conference on General Relativity and Gravitation, Univ. Waterloo, Canada, 1977.
Quantum gravity and path integrals.
132. Hawking S.W., Phys. Lett., **60A**, 81 (1977).
Gravitational instantons.

Статья 1

Черные дыры и их термодинамика

Д.В. Шьяма

Sciama D.W.*, *Vistas Astron.*, **19**, 385 (1976)

Закон возрастания энтропии – второй закон термодинамики – занимает, я думаю, высшее положение среди других законов природы. Если кто-нибудь указывает вам, что ваша любимая теория вселенной находится в несоответствии с уравнениями Масквелла – тем хуже для уравнений Масквелла. Если обнаруживается, что она противоречит результатам наблюдения – ничего, экспериментаторы тоже иногда ошибаются. Но если обнаружится, что ваша теория противоречит второму закону термодинамики, вам не на что надеяться, вашей теории не остается ничего другого, как погибнуть в глубочайшем смирении.

А. С. Эддингтон**

1. ВВЕДЕНИЕ

За последние несколько лет сильно возросло наше понимание теоретических вопросов, связанных с черными дырами, увеличились также и экспериментальные возможности для их обнаружения. Большая часть достижений теории связана с самой теорией гравитации, т.е. с общей теорией относительности Эйнштейна. Однако среди этих результатов особое место по достоинству занимают результаты, тесно связанные с другими разделами физики. К последним относятся термодинамические свойства черных дыр. Поскольку термодинамика имеет фундаментальный и универсальный характер в "негравитационной" физике, большое научное значение имеет то, что область ее

*Department of Astrophysics, Oxford University.

**Eddington A.S., *The Nature of the Physical World*, Cambridge University Press, 1928, p. 74.

© Pergamon Press, 1976.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

применимости оказывается настолько широкой, что включает в себя процессы, в которых участвуют черные дыры. По этой причине, а также из-за важной роли черных дыр для астрономии я посвящаю эту статью элементарному введению в их термодинамику. При этом термодинамика предполагается известной читателям, незнакомым с общей теорией относительности. [Отдельные технические замечания будут даны в квадратных скобках.]

Я надеюсь тем не менее, что эти читатели по крайней мере бегло просмотрят основные работы, на которых основывается эта статья. Они тогда обратят внимание на то, с какими предосторожностями вводились идеи термодинамики в физику черных дыр. В 1973 г. было обнаружено, что в определенных отношениях черные дыры ведут себя так, как будто они обладают температурой и энтропией, но сначала думали, что эта аналогия с термодинамикой ограничена. В частности, считали, что если черная дыра действительно черная и, следовательно, ничего не излучает, то ее яркостная температура равняется абсолютному нулю и достижение ею состояния равновесия, скажем с чернотельным излучением, невозможно. Теперь, оглядываясь назад, можно сказать, что если бы в свое время отнеслись с достаточным доверием к термодинамике, ее могуществу и универсальности, то могли бы уже тогда предположить, что "черная дыра" излучает.

Фактически же формулу для квантового излучения черной дыры получил Стивен Хокинг в 1974 г. в результате вычислений, основанных на первых принципах. Согласно Хокингу, это излучение имеет тепловой характер, причем оказалось, что температура излучения черной дыры в точности совпадает с величиной, которую ранее называли "аналогом" температуры для черной дыры. Если это открытие подтвердится более подробными вычислениями¹⁾, оно явится одним из наиболее важных теоретических открытий, сделанных когда-либо в физике. В частности, оно позволило бы заполнить пробел в цепи доказательства, устанавливающего термодинамическое поведение

¹⁾ Результат, полученный Хокингом, был позднее подтвержден в целом ряде работ, и в настоящее время его следует считать надежно установленным. Более подробное обсуждение вопросов, касающихся эффекта Хокинга, а также ссылки на соответствующие работы содержатся во вступительной статье. — *Прим. перев.*

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

стационарных черных дыр, и тем самым связать эту область с остальными разделами физики. Эту цепочку выводов можно найти в основных работах [1, 3, 4, 20 – 22, 25], там же содержатся ссылки на более ранние статьи и диссертации, в которых можно обнаружить первые намеки на термодинамическое поведение черных дыр.

Замечательной особенностью этого развития является то, что, как уже было известно в течение долгого времени, термодинамические рассуждения непосредственно не применимы к явлениям, включающим ньютоновскую гравитацию. Например, самогравитирующая система может обладать отрицательной теплоемкостью. Известный пример этого — движение искусственного спутника в земной атмосфере. Из-за действия трения спутник движется по спирали, приближаясь к Земле, и при этом его скорость возрастает. Другими словами, диссипация при трении может привести к возрастанию кинетической энергии тела. Другой пример, известный астрономам, — физическая система, коллапсирующая под действием собственного притяжения. По мере того как она излучает свою энергию связи на бесконечность, она все более сжимается и становится при этом горячее. Более того, при определенных условиях этот коллапс может продолжаться до тех пор, пока не будет достигнута сингулярность, и в этом случае отсутствует конечное состояние равновесия, для которого характерны либо минимум подходящим образом определенной свободной энергии, либо максимум соответствующим образом определенной энтропии (см. статью Линден-Белла и Вуда [30] и содержащиеся в ней ссылки). К счастью, мы увидим, что в случае образования черной дыры энтропия коллапсирующей системы действительно стремится к конечному максимальному значению.

План статьи следующий. Во втором разделе мы кратко напомним те свойства черных дыр, которые потребуются при обсуждении термодинамики. В частности, отметим необратимый характер поведения площади поверхности классической черной дыры, которая в различных динамических процессах является строго возрастающей функцией времени. Серьезное обсуждение термодинамики начинается в разд. 3. Рассматривая коэффициент полезного действия тепловой машины, в которой черная дыра выступает в роли резервуара, поглощающего тепловую энергию, т.е. "холодильника", мы, следуя Бекенштейну [3], вводим термодинамические определения температуры

и энтропии для невращающейся черной дыры. Мы увидим, что квантовые свойства вещества и излучения играют ключевую роль в этом выводе. Принятые определения обеспечивают выполнимость второго закона термодинамики для этой тепловой машины. В разд. 4 мы рассмотрим равномерно вращающиеся черные дыры. Вследствие того, что можно превратить кинетическую энергию вращения черных дыр в полезную работу вне горизонта, возникают новые термодинамические возможности. Принцип возрастания площади поверхности черных дыр по-прежнему остается справедливым. В конце разд. 4 обсуждается спонтанное излучение энергии и углового момента вращающейся черной дырой. Этот процесс не является процессом Хокинга; в частности, отношение излучаемой энергии к угловому моменту излучения именно таково, что обеспечивается принцип возрастания площади. Впервые мы встретимся с процессом Хокинга в разд. 5. Для вычисления скорости этого процесса необходимо использовать скорее технические (и еще не вполне противоречивые) доводы, связанные с формализмом квантовой теории в искривленном (но неквантованном) пространстве-времени. Мы не будем рассматривать здесь эти доводы, а ограничимся эвристическими соображениями, предполагая, что вычисление Хокинга дает правильный ответ. Наконец, в разд. 6 попытаемся собрать вместе все выводы и провозгласим четыре закона термодинамики черных дыр, следуя идеям, изложенным в работах [1, 3, 4].

2. ОСНОВНАЯ ИНФОРМАЦИЯ О ЧЕРНЫХ ДЫРАХ

Предположим, что читатель знаком с общими астрономическими основами понятия о черных дырах. Ключевыми моментами являются следующие:

- а) существуют предельные значения для масс, которыми могут обладать белые карлики и нейтронные звезды;
- б) многие звезды в Галактике имеют массы, значительно превосходящие эти предельные массы;
- в) масштаб времени, в течение которого подобные звезды исчерпывают все свое ядерное горючее и претерпевают катастрофический гравитационный коллапс, короток по сравнению с возрастом Галактики.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Если такие звезды не сбросят почти все свое вещество, то им уготована судьба окончить свое существование в виде черных дыр (или, возможно, в виде голых, т.е. видимых сингулярностей).

Полезно различать с самого начала два свойства черной дыры, которые иногда путают между собой, а именно, существование

- а) поверхности бесконечного красного смещения,
- б) горизонта событий.

Путаница возникает потому, что для невращающейся [шварцшильдовской] черной дыры поверхности бесконечного красного смещения и горизонт событий расположены случайным образом на одном и том же расстоянии, а именно на радиусе Шварцшильда, равном $R_s = 2 GM/c^2$. Бесконечное красное смещение испытывает свет от источника, покоящегося на шварцшильдовском радиусе. [В статическом пространстве-времени понятие "покоиться" имеет инвариантный смысл. Пространство-время является статическим, если оно допускает существование нормального¹⁾ времениподобного на бесконечности векторного поля Киллинга. Пробная частица в подобном пространстве-времени покоится, если ее четырехмерная скорость параллельна вектору Киллинга в точке, где находится частица. Поверхность бесконечного красного смещения расположена там, где векторы Киллинга становятся светоподобными.]

Горизонт событий является внешней границей области, из которой световые лучи не могут выйти на бесконечность. В статическом пространстве-времени невращающейся черной дыры горизонт событий совпадает с поверхностью бесконечного красного смещения. Однако это не так в нестатическом, но стационарном пространстве-времени равномерно вращающейся черной дыры. В этом случае горизонт событий везде лежит внутри поверхности бесконечного красного смещения,

¹⁾ Векторное поле ξ^μ называется нормальным векторным полем, если существует такое семейство гиперповерхностей, что в каждой точке вектор ξ^μ лишь множителем отличается от вектора нормали к соответствующей гиперповерхности в этой точке. Для того чтобы векторное поле ξ^μ было нормальным, необходимо и достаточно выполнение следующего условия: $\xi_{[\lambda} \partial_\nu \xi_{\mu]} = 0$. Поле ξ^μ называется векторным полем Киллинга, если оно удовлетворяет уравнению $\nabla_\mu \xi_\nu + \nabla_\nu \xi_\mu = 0$, где ∇_μ — ковариантная производная в соответствующей метрике. Векторы Киллинга являются генераторами бесконечно малых преобразований симметрии. — Прим. перев.

за исключением расположенных на оси вращения точек, где эти две поверхности касаются друг друга. [В статическом пространстве-времени векторное поле Киллинга, времениподобное на бесконечности, является нормальным; в нестатическом, но стационарном ("вращающемся") пространстве-времени это не так. В последнем случае поверхность бесконечного красного смещения не является светоподобной гиперповерхностью и, следовательно, не может быть горизонтом событий [43].]

Возможно, более удачное название для поверхности бесконечного красного смещения — "поверхность статического предела", так как только вне этой поверхности частицы могут находиться в покое относительно наблюдателя на бесконечности, если только при этом они располагают достаточно мощными ракетными двигателями. Внутри поверхности все частицы вовлекаются во вращение вокруг вращающейся черной дыры.

Область между горизонтом событий и поверхностью статического предела вращающейся черной дыры называется *эргосферой*; название отражает тот факт, что процессы, происходящие в эргосфере, могут привести к переносу кинетической энергии вращения черной дыры к физическим системам, находящимся на произвольно больших расстояниях. Этот факт был обнаружен Пенроузом [34] и соответствующий процесс теперь называют процессом Пенроуза. В подобном рассмотрении используется то, что частица, покоящаяся на поверхности статического предела, имеет *энергию связи, равную ее массе покоя*. Эвристически это можно понять из того, что энергия тела есть временная компонента ее четырехмерного импульса. Она обращается в нуль из-за бесконечного растяжения времени, связанного с бесконечным красным смещением. [Более точно: полная энергия E тела (кинетическая энергия минус энергия связи) дается выражением $p_i \xi^i$, где p_i — 4-импульс тела и ξ^i — времениподобное на бесконечности векторное поле Киллинга. Величина E постоянна вдоль времениподобной геодезической. Для покоящегося тела $p_i \sim \xi_i$ и на поверхности бесконечного красного смещения ξ_i светоподобно. Следовательно, на этой поверхности E обращается в нуль.]

Рассмотрим теперь возможные типы движения пробной частицы, которая первоначально находилась внутри эргосферы. (Пробной частицей называют частицу, вкладом которой в общее гравитационное поле

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

можно пренебречь.) В некоторых случаях движение частицы приводит к тому, что она вылетает из эргосферы во внешний мир. Соответствующая энергия связи должна быть меньше массы частицы потому, что только при этом условии частица может двигаться в знакомом нам мире вне эргосферы. Поскольку полная энергия есть интеграл движения, данное неравенство выполняется для этих частиц и также внутри эргосферы, несмотря на то что энергия связи может равняться массе на ее внешней поверхности. Дело в том, что последнее свойство имеет место только для покоящихся частиц, в то время как только частицы, движущиеся в эргосфере в направлении вращения черной дыры, могут обладать достаточной энергией, чтобы достичь бесконечности.

По-видимому, не следует удивляться тому, что "вращение пространства-времени" помогает частице улететь на бесконечность. Более удивительно то, что для некоторых орбит внутри эргосферы *энергия связи превосходит массу*. [Это возможно, потому что внутри эргосферы вектор Киллинга ξ^i становится пространственноподобным, следовательно, величина $p_i \xi^i$ может стать отрицательной.] Частица на подобной орбите не может, конечно, вылететь из эргосферы наружу, на самом деле в конце концов она падает внутрь горизонта событий. Именно существование подобных орбит приводит к тому, что может происходить процесс Пенроуза. Для его осуществления требуется ввести частицу снаружи в эргосферу. После того как она окажется внутри эргосферы, надо расщепить ее на две частицы, одна из которых будет находиться на орбите с "отрицательной энергией". Освобожденная энергия связи передается другой частице, которая при этом вылетает из эргосферы, обладая большей энергией, чем первоначальная падающая частица. Таким образом можно извлекать энергию из черной дыры, но, как мы увидим, таким образом может быть извлечена только кинетическая энергия ее вращения.

Нам потребуется рассмотреть еще два других процесса, которые могут приводить к извлечению кинетической энергии вращения черной дыры. Первым из них является процесс Пенроуза, в котором падающая частица заменена волной [45]. Мы предположим, что пространство-время аксиально-симметрично и стационарно. На самом деле это предположение не является ограничением, поскольку, согласно теореме Хокинга [18, 19] (см. также [23]), стационарная чер-

ная дыра должна быть либо аксиально-симметричной, либо статической. В последнем случае, очевидно, полностью отсутствует кинетическая энергия вращения, которую можно было бы извлекать. Предположим также, что падающая волна настолько слаба, что ее влиянием на пространство-время можно пренебречь.

Выберем простую падающую волну, зависимость которой от времени t и азимутального угла φ имеет вид $e^{ivt} e^{im\varphi}$. Так как пространство-время стационарно и аксиально-симметрично, величины ν и m являются интегралами движения. Если распространение волны описывается стандартной теорией поля, отношение этих величин совпадает с отношением энергии и φ -компонентой углового момента падающей волны. То же замечание справедливо и для рассеянной волны, и вследствие сохранения энергии и φ -компоненты углового момента мы имеем следующее соотношение для черной дыры:

$$\frac{\delta M_{\text{BH}}}{\delta J_{\text{BH}}} = \frac{\nu}{m}.$$

Теперь по причине, имеющей фундаментальный характер (она будет объяснена позднее), потребуем, чтобы

$$\delta M_{\text{BH}} \geq \alpha \delta J_{\text{BH}},$$

где α — постоянная, которую мы позднее отождествим с угловой скоростью черной дыры. Отсюда следует, что если бы выполнялось условие

$$\nu \leq \alpha m, \quad (1)$$

то имело бы место неравенство

$$\delta M_{\text{BH}} \leq 0.$$

Если черная дыра теряет массу, то рассеянная волна должна обладать большей энергией, чем падающая. Следовательно, если частота падающей волны удовлетворяет условию (1), то она усиливается чер-

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

ной дырой¹⁾. Это явление Мизнер [31] назвал сверхизлучением; очевидно, что оно является волновым аналогом процесса Пенроуза²⁾.

Другой процесс извлечения кинетической энергии вращения из черной дыры связан с ее гравитационным взаимодействием с материальной системой, расположенной снаружи эргосферы. Рассмотрим два предельных случая. В первом случае на большом расстоянии окружим черную дыру веществом с жестким, но аксиально-несимметричным распределением. Простым примером такой системы мог бы служить большой жесткий кубический остов с черной дырой в центре. Вследствие вращения черной дыры ее гравитационное поле действует на остов, который в свою очередь приходит во вращение вокруг оси черной дыры в том же самом направлении. Но остов аксиально несимметричен, и при вращении он излучает гравитационные волны. Эти волны уносят кинетическую энергию вращения остова; часть энергии поглощается черной дырой, а другую часть можно использовать для совершения работы во внешнем пространстве-времени. Эта работа производится именно за счет кинетической энергии вращения черной дыры. Процесс продолжается до тех пор, пока не будет использована вся эта энергия. Черная дыра становится невращающейся в согласии с теоремой Хокинга, утверждающей, что стационарные черные дыры являются либо статическими, либо аксиально-симметричными.

В другом предельном случае предположим, что к остову приложена соответствующая пара сил, и потому он не вращается: эта пара сил не совершает работу и остов не излучает гравитационных волн на бесконечность. Каким образом может удовлетворяться теорема Хокинга для этой системы? Ответ довольно изящен. Гравитационное поле остова деформирует горизонт. Деформация не вращается относительно бесконечности, но *вращается относительно горизонта*. Во многих отношениях горизонт имеет свойства, подобные свойствам [будущей световой] бесконечности, в частности, это относится к рас-

¹⁾ Возможность усиления волны при отражении от вращающейся черной дыры была предсказана Зельдовичем [45]. См. также работы [41, 46]. — Прим. перев.

²⁾ Мизнер открыл это явление, изучая волновое уравнение на фоне пространства-времени черной дыры. Простой метод, приведенный здесь, принадлежит Бекенштейну [2].

пространению излучения только в одну сторону [в предположении, что отсутствует опережающее излучение]. В соответствие с этим деформация горизонта при своем движении излучает гравитационные волны внутрь горизонта, вследствие чего он замедляет свое вращение, и снова этот процесс продолжается до тех пор, пока черная дыра не перестанет вращаться. В этом случае не производится и не потребляется никакой свободной энергии вне черной дыры, масса которой, следовательно, остается неизменной. В данном случае вся кинетическая энергия вращения превращается в неизвлекаемую массу, находящуюся внутри дыры [16].

Это обсуждение, касающееся различных энергетических процессов, можно сделать более точным, если ввести две новых характеристики черной дыры: угловую скорость и поверхностную гравитацию. Оба эти свойства являются обобщениями известных ньютоновских свойств материи. Чтобы определить угловую скорость, поступим следующим образом. В одном из наших предыдущих примеров мы видели, что окружающий вращающуюся черную дыру остов сам приводится во вращение. Другими словами, на остов действовала гравитационная пара сил. Значение этой пары сил зависит от угловой скорости и остова и исчезает при определенном выборе (ω_0) величины ω . Угловая скорость ω_0 связана с "увлечением инерциальных систем отсчета" [эффект Ленссе — Тирринга]. Значение ее возрастает при приближении к дыре, и ее величина на горизонте называется угловой скоростью Ω самой черной дыры. Это определение особенно важно потому, что, как показал Картер [8], угловая скорость стационарной черной дыры одинакова во всех точках ее горизонта, другими словами, стационарная черная дыра вращается *как твердое тело*.

Поверхностная гравитация черной дыры тесно связана с ускорением пробной частицы, которая находится близко к горизонту и имеет ту же самую угловую скорость, что и черная дыра. Если 4-вектор ускорения определен в терминах собственного времени, то его длина расходится при приближении таких пробных вращающихся частиц все ближе и ближе к горизонту. Однако если бы вместо этого мы использовали координатное время [причем это время определили бы в соответствии со свойством стационарности черной дыры], то получили бы конечную величину, значение которой на горизонте называется поверхностной гравитацией к черной дыре. Эта величина облада-

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

ет тем же свойством, что и угловая скорость, а именно, она постоянна на горизонте стационарной черной дыры [1].

Одним из преимуществ введения угловой скорости и поверхностной гравитации черной дыры является то, что они изящным образом входят в соотношение для разности масс δM двух стационарных аксиально-симметричных черных дыр, для которых (малая) разность площадей поверхностей горизонтов равна δA , а разность их угловых моментов $-\delta J$. Это соотношение было выведено в работе [1] и имеет вид

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J. \quad (2)$$

Здесь второй член можно интерпретировать как работу, совершенную над черной дырой при изменении ее углового момента на δJ . Этот член имеет тот же вид, что и соответствующая величина в ньютоновской механике твердого тела [29]. Первый член, очевидно, имеет другой смысл; в частности, его нельзя интерпретировать как совершенную работу. Причина этого состоит в том, что в то время как δJ может быть как положительной, так и отрицательной величиной (т.е. можно как увеличивать, так и уменьшать угловой момент черной дыры), имеются свидетельства в пользу того, что при внешних воздействиях δA *может быть только положительной (или нулевой) величиной*.

Этот "закон" о возрастании площади поверхности является крайне важным в физике черных дыр. Впервые его выполнимость предположили Пенроуз и Флорид [35], которые обратили внимание на то, что в процессе Пенроуза площадь поверхности [керровской] черной дыры возрастает или в предельных случаях остается неизменной. Она никогда не уменьшается. Подобным образом Кристодулу [12] заметил, что при захвате [керровской] черной дырой частицы определенная величина, которую он назвал неприводимой массой черной дыры, никогда не убывает. Эта величина пропорциональна квадратному корню из площади поверхности черной дыры.

Мы обязаны Хокингу [18] за очень общий и мощный вывод, касающийся "закона возрастания площади поверхности". Этот вывод Хокинга нельзя назвать доказательством, потому что он существенно зависит от одной недоказанной гипотезы, важность которой впервые отметил Пенроуз [34], — это так называемая *гипотеза космической цензуры*, которая, грубо говоря, состоит в том, что всякий

раз, когда происходит гравитационный коллапс звезды, приводящей к появлению сингулярности, эта сингулярность всегда скрыта горизонтом событий от внешнего мира. Далее мы знаем, что в процессе гравитационного коллапса всегда образуется сингулярность, если выполняется определенное предположение о положительности энергии материи [24]¹⁾. Это предположение о положительности энергии выполняется для всех реальных форм классической (т.е. некантованной) материи. В соответствии с этим процесс гравитационного коллапса классической звезды всегда приводит к сингулярности, и если справедлив принцип космической цензуры, то образуется черная дыра. Результат Хокинга состоит в том, что если справедливы предположения о космической цензуре и положительности энергии, то площадь поверхности черной дыры должна *возрастать* при любом нестационарном процессе.

Но справедлива ли гипотеза космической цензуры? Это является наиболее важной нерешенной проблемой классической общей теории относительности. Как мы уже упомянули, имеются отдельные результаты, свидетельствующие в ее пользу. В самом деле, в каждом специальном исследованном случае, эта гипотеза оказывалась справедливой, если об уравнивании состояния вещества коллапсирующей звезды делались реалистические предположения (следует также иметь в виду возможность столкновения черных дыр в пустом пространстве). Этот аргумент не очень хорош, потому что вполне может оказаться, что голые сингулярности встречаются только в сложных процессах, которые было бы очень трудно изучить в деталях. Поэтому важнейшей проблемой классической общей теории относительности остается доказательство или опровержение гипотезы космической цензуры и вместе с ней закона о возрастании площади поверхности. Именно этот закон дает нам "фундаментальное основание" для требования выполнимости неравенства $\delta M_{\text{BH}} \geq \Omega \delta J_{\text{BH}}$, которым мы воспользовались при выводе явления сверхизлучения.

Нам остается еще сделать ряд последних замечаний о черных дырах, прежде чем мы перейдем к обсуждению их термодинамики,

¹⁾ Строго говоря, для выполнения теоремы о сингулярности требуется, чтобы выполнялись также еще некоторые другие условия. На практике оказывается, что они всегда выполняются, так что основным предположением является предположение о справедливости энергетического условия.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

в частности потому, что они помогут сделать наши предыдущие замечания более конкретными. Мы подчеркивали, какую важную роль играют *стационарные* черные дыры, но до сих пор не рассмотрели вопрос о том, сколько параметров требуется для полного описания стационарной черной дыры. Оказывается, что обсуждение можно сделать гораздо более конкретным в силу выполнимости некоторых мощных теорем единственности, которые справедливы, если можно пренебречь гравитационным полем вещества, расположенного вне горизонта событий. В течение ряда лет в литературе ссылались на эти теоремы как на гипотезу Израэля — Картера, однако недавно, наконец, они были доказаны [9, 10, 18, 39]. На самом деле первая теорема такого рода была доказана еще в 1967 г. в важной работе Израэля [26]. Теорема устанавливает, что всякое пустое статическое пространство с регулярным горизонтом событий должно описываться геометрией Шварцшильда (а значит, являться, в частности, сферически-симметричным и зависеть только от массы черной дыры)¹⁾. Во второй своей важной работе [27] Израэль доказал, что если пространство-время не содержит вещество, но содержит статическое электромагнитное поле, то статическая черная дыра должна быть заряженным аналогом шварцшильдовской дыры [т.е., рейсснер-нордстремовской черной дырой] или, если допустить существование магнитных монополей, — ее соответствующей модификацией.

После этого различными учеными была высказана гипотеза, что пустое *стационарное* пространство-время с регулярным горизонтом событий должно быть частным решением полевых уравнений Эйнштейна, которое нашел Рой Керр в 1963 г. Это решение представляет собой пространство-время, связанное с *вращающейся* черной дырой. Оно аксиально-симметрично и зависит только от двух параметров, а именно от массы M и углового момента J черной дыры. Эту гипотезу доказал Картер [9, 10] для стационарной черной дыры в вакууме в предположении, что она аксиально-симметрична и ее можно непрерывным образом деформировать в невращающуюся дыру. Затем появилась теорема Хокинга [18], на которую мы уже ссылались (стационарная черная дыра либо статична, либо аксиально-симметрична),

¹⁾ Доказательство Израэля опиралось на некоторые предположения технического характера, необходимость в которых была позднее устранена [32].

которая позволила отбросить предположение об аксиальной симметрии. Еще позднее Робинсон [39] доказал, что не нужно дополнительно предполагать, что черная дыра допускает непрерывную деформацию в невращающуюся дыру. Кроме того, Робинсон [38] и Бозе и Ванг [5] доказали, что при наличии электромагнитного поля единственно возможным является заряженный аналог решения Керра (а именно, решение Керра — Ньюмена [33]).

Чтобы лучше разобраться в том, почему имеют место эти теоремы единственности, рассмотрим сходную проблему о решении волнового уравнения для негравитационного возмущения, распространяющегося в пространстве-времени черной дыры. В пределе, когда возмущение является статическим, не существует нетривиального несингулярного решения, если только источник возмущения не удовлетворяет закону сохранения. В последнем случае вне горизонта имеется возмущение, связанное с сохраняющейся частью источника. Например, скалярное поле, которое не имеет сохраняющихся источников, не может быть статическим и удовлетворять регулярным граничным условиям на бесконечности и на горизонте [11, 36, 37], если только, что тривиально, оно не постоянно. Напротив, векторное поле с нулевой массой покоя (например, электромагнитное поле) может иметь сохраняющийся источник (например, электрический заряд). В этом случае отличный от нуля сохраняющийся источник внутри горизонта порождает регулярное статическое поле вне его. В частности, кулоновское поле электрического заряда может проникнуть через горизонт, а статическое поле электрического дипольного момента (который, очевидно, не сохраняется) через горизонт проникнуть не может.

Физическая причина подобного поведения — это то, что статическое поле, связанное с сохраняющимся источником, распространяется *мгновенно*, в то время как остальное поле распространяется со скоростью, которая определяется волновым уравнением поля. Если выразиться более математически, то дело сводится к тому, что полевое уравнение, связанное с сохраняющимся источником, является эллиптическим (например, $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$), в то время как оставшиеся полевые уравнения — гиперболическими (например, оставшиеся уравнения Максвелла). С этим различием связано существование теоремы типа теоремы Гаусса, связывающей поверхностный интеграл

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

от поля, вычисленный в один момент времени, с полным сохраняющимся источником внутри этой поверхности, вычисленным в тот же самый момент времени (например, $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho dV$). Следовательно, горизонт черной дыры можно рассматривать как фильтр, который полностью препятствует распространению *волны* изнутри наружу, но не действует на мгновенное статическое поле, связанное с сохраняющейся частью источника. Последняя должна оставаться отличной от нуля вне горизонта, для того чтобы теорема Гаусса была выполнена¹⁾.

Данные соображения переносятся на случай самого гравитационного поля. В этом случае возникает дополнительное усложнение, а именно, полевые уравнения Эйнштейна можно рассматривать как волновое уравнение для тензора потенциала g_{ij} второго ранга, распространяющегося на фоне искривленного пространства-времени, геометрия которого также определяется тензорным полем g_{ij} , выступающим теперь в роли метрики. Несмотря на это усложнение, можно считать, что горизонт черной дыры отфильтровывает распространяющуюся часть гравитационного поля. Сохраняющимися величинами в данном случае являются энергия-импульс и угловой момент, и поэтому не следует удивляться тому, что пространство-время вне стационарной черной дыры полностью определяется ее массой и угловым моментом; информация о более высоких моментах распределения энергии и импульса внутри горизонта полностью отфильтровывается.

Очень полезно располагать этими единственно возможными для стационарных черных дыр решениями, так как их свойства можно подробно изучить. Они важны также с точки зрения физики, поскольку естественно ожидать, что пространство-время вне звезды, коллапс которой приводит к образованию черной дыры, быстро достигает стационарного состояния. Это ожидание подтверждено некоторыми выполненными ранее расчетами коллапса (например, для звезды, первоначальная внешняя метрика которой мало отличается от решения

¹⁾ Следует отнестись с известной осторожностью к приведенным выше рассуждениям автора. В самом деле, в случае, например, массивного векторного поля A_μ соответствующий ток j^μ , порождающий это поле, удовлетворяет закону сохранения $\nabla_\mu j^\mu = 0$, а компонента поля A_0 при заданных значениях A_i и \dot{A}_i удовлетворяет эллиптическому уравнению. Однако тем не менее у черной дыры отсутствуют "волосы" векторного массивного поля. — Прим. перев.

Шварцшильда [36, 37]). При обсуждении термодинамики полезно иметь под рукой выражения для угловой скорости Ω , поверхностной гравитации κ и площади поверхности A керровской черной дыры через ее массу и угловой момент. Если использовать единицы, в которых $G = c = 1$, то эти выражения имеют вид

$$\Omega = J / \{2M(M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2})\}, \quad (3)$$

$$\kappa = (M^4 - J^2)^{1/2} / \{2M(M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2})\}, \quad (4)$$

$$A = 8\pi(M^2 + (M^4 - J^2)^{1/2}).$$

Для дальнейшего особенно важно отметить, что

$$\kappa \rightarrow 0 \text{ при } J \rightarrow M^2.$$

На самом деле, если $J > M^2$, то керровская метрика по-прежнему представляет собой решение полевых уравнений Эйнштейна в пустоте, но она больше не обладает горизонтом событий. Внутренняя сингулярность этого решения "голая", и черная дыра отсутствует. Следовательно, если справедлива гипотеза космической цензуры, то невозможно "раскрутить" керровскую черную дыру так, чтобы ее угловой момент превысил квадрат ее массы¹⁾. До сих пор все попытки придумать мысленный эксперимент, в результате которого удалось бы "раскрутить" черную дыру до такого состояния, терпели поражение, причем керровская черная дыра просто не принимает вещество или электромагнитное излучение, угловой момент которого на единицу массы слишком велик. С этим вопросом связан, как мы увидим, один из четырех законов термодинамики черных дыр.

3. ТЕРМОДИНАМИКА НЕВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

Существуют много различных способов введения термодинамических понятий в физику черных дыр, и проницательный читатель уже, наверное, обратил внимание на некоторые намеки, сделанные в этом направлении при обсуждениях в предыдущем разделе. Вероятно, простейший подход — это рассмотрение коэффициента полезного действия тепловой машины, в которой роль холодильника играет невра-

¹⁾ Интересно отметить, что для Солнца $J \sim M^2$. Что происходит при коллапсе подобных тел в рамках общей теории относительности не ясно даже качественно.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

шающаяся черная дыра. Следуя Бекенштейну [2, 3], мы выберем в качестве рабочего тела ящик, содержащий чернотельное излучение при температуре T . Чтобы привести тепловую машину в действие, будем медленно опускать ящик до тех пор, пока он не приблизится к горизонту, при этом будет совершаться некоторая работа. Затем ящик откроем и позволим чернотельному излучению упасть на черную дыру. Снова закроем ящик и медленно возвратим его в исходную позицию. Так как теперь ящик стал легче, то потребуется совершить меньшую работу, чем ящик совершил при своем опускании. В результате этого цикла за счет переноса некоторого количества тепла холодильнику получается некоторый выигрыш в работе.

Найдем теперь коэффициент полезного действия этой тепловой машины. Так как ящик опускается медленно, можно пренебречь его гравитационным излучением и предположить, что вся освобожденная энергия связи превращается в работу, совершаемую около точки закрепления веревки, поддерживающей ящик. Если бы ящик действительно достиг горизонта черной дыры, то, как мы видели в предыдущем разделе, освобожденная энергия связи в точности совпала бы с его массой покоя. Однако мы хотим, чтобы ящик можно было вернуть обратно, поэтому мы должны быть уверены, что он не пересекает горизонт, так как в противном случае он оказался бы втянут внутрь черной дыры. Поэтому мы остановим спуск в тот момент, когда центр ящика находится на расстоянии порядка d над горизонтом, где d — средний размер ящика¹⁾. Энергия связи ящика в этом случае меньше его массы покоя на величину $m\kappa d$ (при условии, что $\kappa d \ll c^2$), где m — масса ящика, а κ — поверхностная гравитация черной дыры, вычисленная на горизонте. Следовательно, работа, совершенная над веревкой и механизмом ее поддержки, равна $m(1 - \kappa d)$. Для невращающейся черной дыры ньютоновская оценка для κ дает величину GM/R^2 , где M — масса черной дыры, а R — радиус горизонта. Полагая $R = 2 GM/c^2$, получаем

$$\kappa = c^2/4GM = 1/4M$$

¹⁾ Если мы предположим, что материал, из которого сделана веревка, удовлетворяет энергетическому условию, а в остальных отношениях является идеальным, то, для того чтобы веревка не оборвалась, должно выполняться условие $d > (e^2 - 1)^{-1} \cdot \text{Радиус Шварцшильда}$ [15].

в гравитационных единицах ($G = c = 1$). Этот результат справедлив также и в общей теории относительности [ср. с уравнением (4) при $J = 0$].

Пусть теперь черная дыра поглотит часть излучения ящика, после этого медленно возвратим ящик обратно в исходное положение. Если масса, которая соответствует энергии излучения, поглощенной черной дырой, равна δm , то работа, совершаемая механизмом поддержки при возвращении ящика, равна $(m - \delta m)(1 - \kappa d)$. Чистый выигрыш энергии при этом равен $\delta m(1 - \kappa d)$. Он получен за счет передачи холодильнику количества тепла, равного δm . Следовательно, коэффициент полезного действия η нашей тепловой машины (отношения совершенной работы к затраченному количеству тепла) равен

$$\eta = 1 - \kappa d.$$

Чтобы получить наибольший коэффициент полезного действия, мы должны сделать размер d ящика минимально возможным. Здесь мы подходим к ключевому моменту в рассуждении, впервые отмеченному Бекенштейном [3]. Если ящик содержит чернотельное излучение при равновесной температуре T , то имеется *квантовомеханическое ограничение на минимально допустимые размеры ящика*. Во избежание больших флуктуаций, которые не позволили бы нам непосредственно применять термодинамику, размеры ящика должны быть достаточно велики, чтобы в нем "уместились" те длины волн, в которых заключена большая часть энергии излучения. Другими словами,

$$d > \beta/T,$$

где, согласно закону смещения Вина, $\beta \sim \hbar/k$ ¹⁾. Следовательно,

$$\eta < 1 - \frac{\beta \kappa}{T}.$$

Теперь мы можем попытаться провести сравнение с термодинамикой. Если наш цикл можно рассматривать как цикл Карно, то второй закон термодинамики требует, чтобы коэффициент полезного действия удовлетворял неравенству

¹⁾ Это условие для d является более ограничительным, чем условие приведенное в предыдущем примечании, если только $T < [(c^2 - 1)\beta]/[2M]$. Мы будем считать, что это неравенство выполнено.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

$$\eta \ll 1 - \frac{T_{\text{холодильника}}}{T_{\text{нагревателя}}},$$

причем равенство возможно только в предельном случае обратимого преобразования. Таким образом, мы приходим к тому, что черной дыре можно приписать термодинамическую температуру $T_{\text{ВН}}$, определяемую формулой

$$T_{\text{ВН}} = \beta \kappa = \beta/4M. \quad (5)$$

Рассуждая так, нельзя определить точное значение коэффициента β . Позднее (в разд. 5) мы приведем другой вывод, основанный на квантовой механике, который позволит определить значение этого коэффициента.

Поразительная особенность соотношения (5) состоит в том, что при увеличении массы (энергии) черной дыры она не нагревается, а остывает. Однако этому не следует удивляться, потому что, как мы видели во введении, самогравитирующая система в ньютоновской теории ведет себя точно так же. Используя приведенную выше оценку для коэффициента β , имеем

$$T_{\text{ВН}} \sim 10^{-7} \frac{M_{\odot}}{M} \text{ К.}$$

Таким образом, черная дыра с массой, равной массе Солнца, имела бы очень низкую температуру, но, скажем, для дыры с массой 10^{15} г соответствующая температура T порядка 10^{12} К или $kT \sim 100$ МэВ. (Это замечание окажется важным позднее.) Однако для того чтобы была применима простая теория, основанная на первом приближении, мы должны еще удовлетворить неравенству $\kappa d \ll 1$. Для этого требуется, чтобы выполнялось соотношение $T_{\text{ВН}} \ll T$, которое не противоречит неравенству $T < (e^2 - 1) \beta/4M$ (см. примечание на стр. 48).

Теперь, поскольку, используя второй закон термодинамики, мы смогли получить выражение для температуры черной дыры, нам хотелось бы проделать то же самое для ее энтропии. Действительно, так как перенос чернотельного излучения есть чистый перенос тепла без совершения работы, можно утверждать, что потеря энтропии ящиком равна $\delta m/T$, в то время как энтропия, полученная черной дырой, равна $\delta M_{\text{ВН}}/T_{\text{ВН}}$. Чтобы вычислить $\delta M_{\text{ВН}}$, заметим, что чистый

выигрыш энергии за один цикл равен $m(1 - \kappa d)$, в то время как потеря массы рабочего тела составляет δm . Следовательно, эффективная потеря массы рабочего тела равна $\delta m \kappa d$ и она должна равняться массе $\delta M_{\text{ВН}}$, полученной холодильником. Таким образом,

$$\delta S_{\text{ВН}} = \frac{\delta m \kappa d}{T_{\text{ВН}}}.$$

Убедимся, что наш цикл Карно действительно приводит к возрастанию энтропии. Мы имеем

$$\delta S_{\text{ВН}} = \frac{d}{\beta} \delta m \geq \frac{\delta m}{T} = \delta S_{\text{ящика}}$$

Следовательно, черная дыра в самом деле приобретает больше энтропии, чем теряет ящик. Величина $\delta S_{\text{ВН}}$ не зависит от параметров черной дыры, но если записать ее в виде $(4/\beta) M_{\text{ВН}} \delta M_{\text{ВН}}$, то видно, что при $\delta M_{\text{ВН}} \ll M_{\text{ВН}}$

$$\delta S_{\text{ВН}} = \frac{1}{8\pi\beta} \delta A_{\text{ВН}}, \quad (6)$$

где $A_{\text{ВН}}$ — площадь поверхности горизонта событий (т.е. $16\pi M_{\text{ВН}}^2$ для шварцшильдовской черной дыры)¹⁾. Таким образом, мы приходим к тому, что для полной энтропии $S_{\text{ВН}}$ черной дыры можно написать следующее выражение:

$$S_{\text{ВН}} = \frac{1}{8\pi\beta} A_{\text{ВН}}.$$

(предполагая, что $S_{\text{ВН}} = 0$ при $A_{\text{ВН}} = 0$); другими словами, *энтропия (стационарной) черной дыры пропорциональна площади поверхности ее горизонта.*

Чему равен численный коэффициент в этом соотношении? Если в качестве значения β подставить \hbar/k и вернуться к негравитационной системе единиц, то получим

$$S_{\text{ВН}} \sim \frac{A_{\text{ВН}}}{L_P^2} k,$$

¹⁾ Уравнение (6) немедленно вытекает из (2) при $\kappa = T_{\text{ВН}}/\beta$ и $\delta J = 0$.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

где L_p — планковская длина $(\hbar G/c^3)^{1/2} \sim 1,6 \cdot 10^{-33}$ см. В единицах СГС соотношение имеет вид

$$S_{\text{BH}} \sim (10^{48} \text{ эрг/град} \cdot \text{см}^2) A_{\text{BH}}.$$

Например, энтропия черной дыры солнечной массы была бы около 10^{60} эрг/град (в то время как энтропия реального Солнца порядка 10^{42} эрг/град). Бекенштейн указал, что эту разницу можно понять в рамках информационного подхода к термодинамике [6]. В процессе образования невращающейся черной дыры полностью теряется вся информация о находящихся в ней частицах за исключением той информации, которая касается их полной массы. Эта потеря информации соответствует возрастанию энтропии и при этом — максимально возможному возрастанию, поскольку, как мы уже видели в разд. 2, информация о полной массе всегда доступна для внешнего наблюдателя (эта полная масса связана с поверхностным интегралом на бесконечности типа интеграла, появляющегося в теореме Гаусса). Существование максимума энтропии разрешает парадокс ньютоновской теории, состоящий в том, что коллапсирующая система не имеет конечного состояния равновесия, характеризуемого максимумом энтропии.

Бекенштейн привел ряд интересных приложений идеи о том, что энтропия черной дыры пропорциональна площади ее поверхности. Мы обсудим здесь два из них. Первое приложение — другой вывод оценки для константы пропорциональности $1/8 \pi \beta$, который использует теорию информации. Он основывается на том, что при падении элементарной частицы в черную дыру теряется определенная информация. Необходимо выяснить, как возрастает площадь поверхности в этом процессе. Возрастание площади поверхности в рассмотренном нами цикле Карно равнялось $8 \pi \delta m d$. Бекенштейн, используя два дополнительных аргумента, в довольно общем виде показал, что это выражение дает нижний предел для возрастания площади поверхности в случае, когда черная дыра поглощает тело массы δm и размером d . В первом случае он вычислил минимум энергии, соответствующей орбите, которая имеет прицельный параметр d относительно горизонта черной дыры. Эта энергия дает минимум возрастания массы черной дыры в результате прямого захвата массы δm . Соответствующий минимум возрастания площади поверхности снова оказался равным

$8 \pi \delta m d$. Второй вывод Бекенштейна является довольно общим. Он состоит в непосредственном решении задачи о возрастании площади поверхности с использованием полевых уравнений Эйнштейна, в результате чего удастся связать геометрические свойства световых образующих горизонта с тензором энергии-импульса физической системы, которая поглощается черной дырой. И снова Бекенштейн получил нижний предел возрастания площади поверхности равный $8 \pi \delta m d$.

Далее, в качестве d для элементарной частицы естественно брать величину порядка ее комптоновского радиуса $\hbar / \delta m c$. Для минимума возрастания площади поверхности мы получаем тогда величину порядка $8 \pi \hbar$. При попадании частицы в черную дыру это возрастание площади поверхности (энтропии) должно скомпенсировать потерю "одного бита" информации, вызванную потерей возможности для наблюдателя во внешнем мире идентифицировать ее. Энтропия, связанная с одним битом, имеет порядок единицы (в единицах постоянной Больцмана k). Следовательно,

$$\delta S_{\text{ВН}} \sim \frac{k}{8 \pi \hbar} \delta A_{\text{ВН}},$$

что совпадает с полученным ранее соотношением (6).

Второе приложение возникает при сравнении современной энтропии Солнца с энтропией, которую оно имело бы, если бы сколлапсировало в черную дыру (мы на время пренебрегаем вращением Солнца). Как мы видели, коллапс связан с огромной диссипацией, причем возрастание энтропии характеризуется фактором $\sim 10^{18}$. Однако энтропия горячего макроскопического тела, подобного звезде, примерно пропорциональна числу содержащихся в нем нуклонов и, следовательно, его массе. В отличие от этого, энтропия черной дыры пропорциональна площади поверхности и, следовательно, *квадрату* ее массы. Следовательно, отношение энтропии черной дыры к макроскопической энтропии пропорционально массе тела. Бекенштейн задал следующий интересный вопрос: "Для какой массы это отношение равно единице?" Другими словами, для какой массы не происходит диссипации, связанной с образованием черной дыры из нагретого макроскопического тела? Из нашего рассмотрения следует, что эта масса имеет порядок $10^{-18} M_{\odot}$, или $\sim 10^{15}$ г.

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Очевидно, что масса этого порядка должна привлечь к себе существенный интерес. Во-первых, как указал Бекенштейн, черные дыры меньшей массы не могли бы спонтанно образовываться при коллапсе горячего макроскопического объекта, так как если где-либо в системе не происходит возрастания энтропии на соответствующую величину, то этот процесс приводил бы к уменьшению энтропии. Во-вторых, шварцшильдовский радиус, отвечающий массе 10^{15} г, имеет порядок комптоновского радиуса элементарной частицы ($\hbar/m_0 c \sim 10^{-13}$ см). Это снова указывает на то, что было бы трудно сжать вещество в черную дыру с массой, меньшей чем 10^{15} г. В-третьих, число нуклонов, содержащихся в массе 10^{15} г, порядка 10^{39} . Это именно то число, которое, как может заметить читатель, связано с известным и загадочным совпадением между определенными безразмерными отношениями фундаментальных постоянных физики микромира и космологии [40]. В самом деле, это число совпадает с отношением радиуса Вселенной к комптоновскому радиусу элементарной частицы, а также с отношением электростатической и гравитационной сил между электроном и протоном.

Черная дыра с массой 10^{15} г обладает еще одной важной особенностью. Если спины всех 10^{39} элементарных частиц, находящихся внутри нее, были бы направлены параллельно, то черная дыра обладала бы столь большим моментом, что ее геометрия описывалась бы решением Керра с максимальным вращением $J \sim M^2$. В менее массивной черной дыре все спины ее элементарных частиц не могли бы быть выстроены параллельно, так как это привело бы к неравенству $J > M^2$, невозможному для стационарной черной дыры. Заметим, наконец, еще одно совпадение: период полураспада черной дыры с массой 10^{15} г в результате процесса Хокинга, описанного в разд. 5, имеет порядок возраста Вселенной. Читателю, возможно, будет приятно развлечься подсчетом числа независимых совпадений, связанных с черной дырой, обладающей массой 10^{15} г.

4. ТЕРМОДИНАМИКА ВРАЩАЮЩИХСЯ ЧЕРНЫХ ДЫР

При переходе к рассмотрению вращающихся черных дыр возникают новые термодинамические возможности, связанные с тем, что как мы уже видели, можно извлекать из них часть их кинетической энергии вращения. Возникает вопрос о коэффициенте полезного дей-

ствия этого процесса. Конечно, возможно также и увеличение их кинетической энергии вращения. Эти процессы связаны с совершением работы, сопровождаемой, возможно, переносом тепла. Отличие между работой и теплом, столь известное в традиционной термодинамике, в нашем случае формально проявляется в соотношении (2), а именно

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J.$$

Можно сравнить это выражение с ньютоновской формулой для изменения внутренней энергии системы жестко вращающихся тел [29]:

$$\delta E = T \delta S + \Omega \delta J.$$

Здесь член $\Omega \delta J$ описывает совершаемую работу, в то время как $T \delta S$ описывает перенос тепла. В случае черной дыры, $\Omega \delta J$, по-видимому, снова описывает совершаемую работу, и поэтому естественно попытаться отождествить $\kappa \delta A / 8\pi$ с переносом тепла. Если бы мы могли это сделать, то имели бы возможность назвать $\beta \kappa$ температурой вращающейся черной дыры, а $A / 8\pi \beta$ — ее энтропией.

Эта терминология хорошо согласовывалась бы с тем фактом, который уже обсуждался в разд. 2, а именно: что можно установить, какая часть кинетической энергии вращения черной дыры пригодна для совершения работы вне горизонта и какая часть переходит в черную дыру в такой форме, что эту энергию уже больше нельзя извлечь обратно. Мы приводили примеры как таких случаев, когда можно использовать для совершения работы практически всю кинетическую энергию вращения, так и таких случаев, когда это невозможно. На термодинамическом языке эти различные случаи можно охарактеризовать *коэффициентом полезного действия* процесса извлечения энергии.

Однако решающим свойством вращающихся черных дыр, которое позволило бы нам оправдать нашу терминологию, если ее вообще можно строго доказать, является закон возрастания площади поверхности черной дыры при ее взаимодействиях с окружающим миром. Именно этот закон, действительно, заставляет нас считать, что член $(\kappa \delta A / 8\pi)$ описывает тепло, а не работу, и поэтому является мерой диссипации. Используя дальше терминологию, взятую из термодинамики, мы могли бы назвать процесс изменения кинетической

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

энергии вращения черной дыры *обратимым*, в то время как процесс, приводящий к изменению площади ее поверхности, был бы *необратимым*.

Из приведенного выше рассмотрения не следует делать вывод, что никакую часть тепла, заключенного в черной дыре, нельзя использовать для совершения работы. Как отметил Бекенштейн, здесь ситуация совершенно такая же, как в обычной термодинамике. Там одиночная система в состоянии теплового равновесия не может совершать работу, однако две системы, каждая из которых по отдельности находится в равновесии, но температуры которых различны, можно заставить совершать работу. В случае черной дыры нельзя совершить работу путем извлечения части массы невращающейся черной дыры, но если имеются две почти стационарные черные дыры, находящиеся на большом расстоянии друг от друга, то при их гравитационном взаимодействии может быть совершена определенная работа. Предельный случай — это ситуация, когда две черные дыры падают друг на друга и, если справедлив принцип космической цензуры, сливаются, образуя одну черную дыру. В этом процессе черные дыры излучали бы гравитационные волны, которые можно было бы использовать для совершения работы. Правда, величина этой работы оказывается ограниченной принципом возрастания площади поверхности. В простейшем случае, когда две невращающиеся черные дыры, масса каждой из которых равна M_i , сливаются в одну с массой M_f , закон возрастания площади поверхности приводит к неравенству

$$M_f^2 > 2 M_i^2.$$

Следовательно, только часть энергии, меньшая чем $(2 - \sqrt{2}) M_i$, может превратиться в гравитационное излучение и использоваться для совершения полезной работы [17].

Теперь следует рассмотреть вопрос о том, каким образом повлияет на наше рассмотрение открытие Хокинга, состоящее в том, что черные дыры вследствие квантовомеханических процессов излучают. Это открытие мы рассмотрим в следующем разделе. Однако уже здесь им нельзя пренебречь, поскольку процесс Хокинга может привести к уменьшению площади поверхности черной дыры. Каким образом может повлиять этот эффект на наш предшествующий вывод, в котором, чтобы оправдать возможность рассмотрения величины $\kappa \delta A / 8 \pi$

как члена, описывающего перенос тепла, мы использовали принцип возрастания площади поверхности?

Не исключено, что этот вывод только получит дополнительное подтверждение. Дело в том, что излучение вне горизонта, возникающее в результате процесса Хокинга, имеет *тепловой* спектр с температурой, пропорциональной поверхностной гравитации κ . Другими словами, уменьшение площади поверхности черной дыры обязательно связано с выделением *тепла*. Таким образом, аналогия с термодинамикой обычного нагретого тела является полной, и ничто не мешает нам рассматривать $\kappa \delta A / 8 \pi$ как член, описывающий перенос тепла.

Чтобы войти в круг идей, лежащих в основе процесса Хокинга, рассмотрим тесно связанный с ним процесс, также имеющий квантовомеханическую природу, но который, однако, согласуется с принципом возрастания площади поверхности. Соответствующий вывод начнем с рассмотрения явления сверхизлучения, которое мы уже обсуждали в разд. 2. С точки зрения квантовой механики падающие и выходящие волны можно рассматривать как поток частиц, рассеиваемый вращающейся черной дырой. Квантовомеханическим аналогом сверхизлучения представляется в этом случае индуцированное излучение. Напомним, что с точки зрения квантовой механики в системе, состоящей из атомов и фотонов, не может установиться термодинамическое равновесие, если только возбужденный атом не излучает *спонтанно* фотоны, причем коэффициент, характеризующий скорость этого процесса, должен быть определенным образом связан с коэффициентом индуцированного излучения [13, 14]. Конечно, нельзя заранее ожидать, что система, содержащая вращающуюся черную дыру, обязательно придет в состояние равновесия с системой частиц. Тем не менее естественно поинтересоваться, не может ли черная дыра в результате квантового процесса спонтанно излучать энергию в виде потока частиц?

Положительный ответ на этот вопрос получили Зельдович [46], Старобинский [41] и Унру [42] (см. также работу [2]). Процесс, рассмотренный в этих работах, связан с наличием квантовых флуктуаций вакуума в эргосфере черной дыры. Вследствие этих флуктуаций в каждый момент времени имеются виртуальные пары частиц и античастиц. Если эти частицы обладают массой покоя m_0 и, следовательно, энергией $m_0 c^2$, то соотношение неопределенности ($\delta E \delta t \gtrsim \hbar$)

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

требуется, чтобы в состоянии истинного вакуума пара частиц до исчезновения могла прожить время, не превышающее величину $\sim \hbar/m_0 c^2$ (комптоновское время). Однако гравитационное поле черной дыры, вообще говоря, не одинаково в точках, где находится частица и античастица и это случайным образом может приводить к тому, что частицы пары за комптоновское время разойдутся на значительное расстояние (скажем, $\sim \hbar/m_0 c$). При этом виртуальная пара может избежать аннигиляции и превратиться в реальную пару; энергия, необходимая для такого процесса, будет получена от гравитационного поля черной дыры. Если окажется, что одна из частиц пары находится на орбите с "отрицательной энергией" и, следовательно, захвачена черной дырой, то ее партнер может обладать достаточной энергией для выхода из эргосферы и вырвется на бесконечность. Непосредственный расчет скорости излучения вращающейся черной дырой углового момента и энергии приводит к тому же самому результату, который получается при выводе, основанном на предположении о равновесии [21, 47], а именно

$$\frac{dJ}{dt} \sim - \frac{J}{M^3} \hbar$$

и

$$\frac{dM}{dt} \sim - \frac{J^2}{M^6} \hbar.$$

Если рассматривать возможность рождения частиц только одного сорта, то характерное время потери углового момента $M^3 \hbar$ совпадает по порядку величины с возрастом Вселенной для массы $M \sim 10^{15}$ г.

5. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Я считаю, что открытие Хокингом [20, 21] теплового излучения черной дыры, если оно будет подтверждено более подробными расчетами¹⁾, — одно из великих достижений в истории физики. Основная причина, которая побуждает меня к этому утверждению, — это то, что Хокинг обнаружил концептуально важное, принципиально наблюдаемое и, возможно, имеющее астрофизическое значение явление,

¹⁾ См. примечание на стр. 32. — Прим. перев.

само существование которого существенно зависит от объединения как принципов, так и формальной структуры квантовой теории поля и общей теории относительности. В физике подобные унифицирующие открытия такого масштаба редки, и когда они происходят, то обычно приводят к целому множеству плодотворных следствий. Можно привести такие примеры, как объединение электричества и магнетизма Фарадеем, объединение электромагнетизма и оптики Максвеллом или объединение гравитации и инерции Эйнштейном. Более того, в настоящем случае имеется также глубокая связь с термодинамикой, и открытие Хокинга было совершенно неожиданным.

Поскольку вычисления Хокинга зависят от нерешенных вопросов интерпретации теории, то еще необходимо подождать окончательного подтверждения. В частности, необходимо определить квантовое понятие частицы в искривленном пространстве-времени, связанном с черной дырой. Для случая пространства-времени *общего вида* это нерешенная проблема, но для случая пространства-времени черной дыры Хокингу удалось использовать тот факт, что оно является асимптотически-плоским. Даже специалисты еще не пришли к полному согласию относительно правильности метода Хокинга, и обсуждение технических деталей, вероятно, еще будет длиться некоторое время. Здесь не место входить в детали, и в дальнейшем изложении я буду предполагать, что Хокинг действительно прав.

В конце разд. 3 мы видели, что вращающаяся черная дыра должна излучать поток частиц и таким образом терять свой угловой момент. Это — квантовый процесс, однако он "квазиклассичен" в том смысле, что не нарушает закона возрастания площади поверхности и тесно связан с классическим явлением сверхизлучения. Он, конечно, отсутствует для невращающихся черных дыр. Открытый Хокингом эффект представляет собой существенно другое явление, которое приводит к излучению невращающейся черной дыры и которое действительно противоречит принципу возрастания площади поверхности. Эта ситуация непонятна по двум причинам:

- а) хотя эффекты Хокинга и Старобинского — Унру различны, эвристически их можно объяснить сходным образом, а выражения для потоков излучения можно объединить в виде одной простой формулы;
- б) эффект Хокинга имеет место, когда черная дыра образуется в результате коллапса звезды, но отсутствует в случае черной дыры, которая "существовала всегда".

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

Рассмотрим сначала одно из эвристических объяснений этого эффекта, данное самим Хокингом. Этот эффект связан с существованием даже в случае невращающихся черных дыр областей, в которых имеются орбиты с "отрицательной энергией". Однако в отличие от случая вращающихся черных дыр, эти области (при классическом рассмотрении) лежат полностью *внутри* горизонта [где вектор Киллинга, который является времениподобным вне горизонта, становится пространственноподобным]. Рассмотрим теперь флуктуации, в результате которых возникает пара виртуальных частиц непосредственно вне горизонта невращающейся черной дыры. Возможно, что одна из этих частиц находится в состоянии с отрицательной энергией, которое в классике запрещено, но которое связано посредством квантовомеханического эффекта туннелирования с разрешенными состояниями с отрицательной энергией внутри горизонта. Если происходит туннелирование, то будет иметь место поток *отрицательной* энергии внутрь горизонта и, следовательно, уменьшение площади его поверхности. Другая частица пары будет обладать положительной энергией и может покинуть окрестность горизонта. Если туннелирование не происходит, то виртуальная пара просто рекомбинирует.

Не следует, по-видимому, удивляться тому, что вероятность туннелирования должна определяться поверхностной гравитацией κ черной дыры. В результате Хокинга замечательно то, что определенная таким образом вероятность приводит к совпадению *спектра энергии излученных частиц*¹⁾ *со спектром теплового излучения тела с температурой $\hbar \kappa / 2 \pi k c$* . Наше прежнее отождествление κ с величиной, пропорциональной температуре черной дыры, находит здесь подтверждение в таком решающем моменте, как возможность установления теплового равновесия черной дыры с полем чернотельного излучения²⁾. Более того, коэффициент пропорциональности β получает точное значение.

¹⁾ Отметим, что совпадает не только спектр, но и все характеристики излучения, такие, например, как корреляционные функции числа фотонов в разных модах. Это обстоятельство оказывается важным при рассмотрении процесса установления равновесия с чернотельным излучением. (Более подробно см. вступительную статью.) — *Прим. перев.*

²⁾ Однако, следует отметить, что это равновесие неустойчиво, поскольку, как мы уже видели, чем больше энергии излучает черная дыра, тем горячее она становится.

Не следует слишком буквально принимать это объяснение процесса Хокинга, поскольку оно, по-видимому, так же применимо к "вечной" (eternal) черной дыре, как и к дыре, возникающей при гравитационном коллапсе. Однако в первом случае пространство-время вне горизонта полностью статично или стационарно, так что, по-видимому, невозможно рождение реальных пар [при наличии времениподобного вектора Киллинга не может происходить смешивания положительных и отрицательных частот]¹⁾. С другой стороны, во время коллапса даже на его последних стадиях, когда коллапсирующее тело приближается к горизонту событий, метрика зависит от времени и возможно рождение реальных частиц. С этой точки зрения удивительно, что Хокинг получил отличное от нуля излучение, более того, он получил излучение, которое не зависит от деталей структуры звезды и ее коллапса: Это напоминает факт, вытекающий из теорем единственности, а именно: внешние метрики, возникающие при образовании черной дыры, в конце концов описываются решениями Шварцшильда и Керра. Здесь также происходят сложные переходные процессы. Однако результат Хокинга относится к асимптотическому поведению излучения, возникающему после вымирания переходных процессов, и именно это излучение зависит только от поверхностной гравитации черной дыры.

Хокинг приводит также выражение для спектра излучения фотонов вращающейся черной дырой, которая описывает как тепловое излучение, так и эффект Старобинского — Унру. Эта формула содержит множитель

$$p dp / [\exp \{ (p - m\Omega) / 2 \pi \kappa \} - 1],$$

где p — импульс излучаемых фотонов. Для больших масс κ мало, и этот множитель пренебрежимо мал для $p > m\Omega$. С другой стороны,

¹⁾ Утверждение, что в полностью статическом или стационарном внешнем поле невозможно рождение пар, неверно. Дело в том, что инвариантность уравнений относительно сдвигов во времени еще не означает, что при произвольном выборе начальных данных инвариантным является также и состояние системы. Например, в электростатическом поле может происходить рождение пар из вакуума, и, следовательно, вакуумное состояние неинвариантно относительно сдвига во времени. Вопрос о рождении частиц в гравитационном поле "вечной" черной дыры тесно связан с вопросом об определении вакуума на горизонте прошлого и подробно обсуждается во вступительной статье. — *Прим. перев.*

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

при $p < m\Omega$ он примерно равен $-pd\rho$, что совпадает с результатом Старобинского — Унру. Следовательно, для больших масс имеется малое тепловое излучение, и мы снова возвращаемся к явлению спонтанной супerradiации. Конечно, фотоны ничем не выделены и будут рождаться пары всех сортов частиц, однако поток частиц с массой покоя m_0 будет мал до тех пор, пока $kT_{\text{ВН}}$ не станет больше или порядка $2m_0c^2$.

Очевидно, что работа Хокинга будет очень важна для понимания того, каким образом можно согласовать квантовую механику и общую теорию относительности. Она может оказаться также важной для астрофизики и космологии. Сам Хокинг уже предложил два возможных ее приложения. Первое основывается на том, что характерный масштаб времени τ , в течение которого черная дыра с массой M теряет в виде теплового излучения половину своей массы, дается выражением

$$\tau \sim 10^{10} \left(\frac{M_{\text{Г}}}{10^{15}} \right)^3 \text{ лет.} \quad (7)$$

Следовательно, по мере того как черная дыра излучает и теряет массу, характерный масштаб времени быстро уменьшается так, что за последнюю десятую долю секунды освобождается 10^{30} эрг, другими словами, черная дыра оканчивает свое существование взрывом! На этой стадии ее характерная температура будет столь высокой, что большая часть излучаемых фотонов является γ -квантами.

Как видно из выражения (7), черные дыры солнечной массы не будут взрываться в течение времени, в 10^{54} раз превосходящего время Хэббла. Возможно, однако, что на ранних этапах развития Вселенной могли образовываться черные дыры с массой 10^{15} г. Подобные черные дыры взрывались бы в настоящее время. Эти взрывы могут оказаться важными для астрофизики [7].

Другое приложение, рассмотренное Хокингом, касается менее массивных черных дыр, которые могли образовываться и испаряться на ранних этапах развития Вселенной. Хокинг предположил, что излучение, возникающее при их распаде, может привести к наблюдаемому в настоящее время трехградусному фону реликтового излучения [7].

6. ЧЕТЫРЕ ЗАКОНА ТЕРМОДИНАМИКИ ЧЕРНЫХ ДЫР

Название этого раздела позаимствовано из важной работы Бардина, Картера и Хокинга (БКХ) [1]. Они назвали свою статью "Четыре закона механики черных дыр", потому что она была написана еще до открытия Хокингом того факта, что температура черной дыры, определяемая из принципа возрастания площади поверхности и равенства (2), совпадает с температурой излучения черной дыры. В связи с этим они считали, что аналогия с настоящей термодинамикой ограничена вполне определенными рамками. Ясно, что если процесс Хокинга действительно возможен, то это ограничение, как было указано Хокингом [22], полностью отпадает. Как мы уже указывали, из-за принципиальных трудностей, возникающих при обобщении квантовой теории поля на случай, когда пространство-время является искривленным, еще остаются некоторые сомнения в правильности результата Хокинга. В частности, имеется сложный вопрос о выборе правильных граничных условий [для фейнмановской функции Грина]. На мой взгляд, самый сильный аргумент в пользу результата Хокинга состоит не в том, что прекрасным образом проведены в высшей степени сложные технические вычисления, а просто в термодинамическом характере окончательного результата. Сам Хокинг, по-видимому, также согласен с этим [22].

Нулевой закон

Этот закон гласит, что поверхностная гравитация стационарной черной дыры постоянна на горизонте. Эта теорема была доказана БКХ [1], и она, очевидно, соответствует нулевому закону термодинамики, если предположить, что поверхностная гравитация черной дыры пропорциональна ее температуре.

Первый закон

Этот закон можно записать в виде соотношения

$$\delta M = \frac{\kappa \delta A}{8\pi} + \Omega \delta J,$$

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

которое также было установлено БКХ [1]. Оно соответствует первому закону термодинамики, если κ пропорционально T , а δA пропорционально δS .

Второй закон

Это просто обычный второй закон термодинамики, за исключением того, что к обычной энтропии следует добавить члены, пропорциональные площади поверхностей всех имеющихся черных дыр. Бекенштейн [2 – 4] провозгласил и сделал несколько шагов на пути доказательства этого модифицированного второго закона, но он не знал о хокинговском тепловом излучении черной дыры. Завершающий шаг был сделан Хокингом [22].

Третий закон

Одной из форм обычного третьего закона термодинамики является утверждение, что за конечное число шагов нельзя понизить температуру физической системы до абсолютного нуля. В случае черной дыры температуру следует просто заменить поверхностной гравитацией. Значение полученного таким образом утверждения можно понять из выражения (4) для величины поверхностной гравитации керровской черной дыры. Из этого выражения видно, что абсолютный нуль соответствует экстремально вращающейся керровской черной дыре, т.е. максимальному угловому моменту при заданном значении массы ($J = M^2$), которое еще совместно с существованием горизонта событий. Чтобы получить экстремально вращающуюся черную дыру, необходимо раскрутить дыру до состояния, в котором $J = M^2$. Как было отмечено БКХ, если бы было возможно сделать это за конечное число шагов, то тогда с помощью одного шага можно было бы достичь $J > M^2$. В результате этого появилась бы голая сингулярность; чтобы запретить эту возможность, следует привлечь недоказанную, но весьма правдоподобную гипотезу космической цензуры.

Как мы уже видели, эта гипотеза справедлива в некоторых специальных случаях. Физическим механизмом, который мог бы не допустить слишком быстрого вращения черной дыры по крайней мере в линейном приближении, является возникновение сил отталкивания либо электростатического, либо спин-спинового взаимодействия [44].

Хотя приведенные в этой работе аргументы весьма остроумны, они еще весьма далеки от общего доказательства в полной нелинейной теории. По-видимому, очень трудно найти такое доказательство, и эта задача является наиболее важной нерешенной проблемой классической общей теории относительности.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Из нашего обсуждения следует, что, по-видимому, существуют глубокие связи между астрофизикой, общей теорией относительности, квантовой теорией и термодинамикой. Вероятно, что другие важные связи еще ждут своего открытия. Если это так, то здесь имеется богатое поле для исследований, таких, которые несомненно откроют нам новые перспективы в астрономии.

Благодарности

Я благодарен Роджеру Пенроузу за многие полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W., *Commun. Math. Phys.*, **31**, 161 (1973).
2. Bekenstein J.D., *Phys. Rev.*, **D7**, 949 (1973).
3. Bekenstein J.D., *Phys. Rev.*, **D7**, 2333 (1973).
4. Bekenstein J.D., *Phys. Rev.*, **D9**, 3292 (1974).
5. Bose S.K., Wang M.Y., *Phys. Rev.*, **D10**, 1675 (1974).
6. Brillouin L., *Science and Information Theory*, Academic Press, New York, 1956 (Имеется перевод: Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, Физматгиз, М., 1960.)
7. Carr B.J., *Astrophys. Journ.*, **201**, 1 (1975).
8. Carter B., *Journ. Math. Phys.*, **10**, 70 (1969).
9. Carter B., *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 331 (1971).
10. Carter B., в сборнике *Black Holes*, eds. B.S. DeWitt and C.M. DeWitt, Gordon & Breach, New York.
11. Chase J.E., *Comm. Math. Phys.*, **19**, 276 (1970).
12. Christodoulou D., *Phys. Rev. Lett.*, **25**, 1596 (1970).
13. Dirac P.A.M., *The Principles of Quantum Mechanics*, Oxford, University Press, Oxford, 1947. (Имеется перевод: П. А. М., Дирак, Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960.)
14. Einstein A., *Phys. Zs.*, **18**, 121 (1917).
15. Gibbons G.W., *Nature Phys. Sci.*, **240**, 77 (1972).
16. Hartle J.B., *Phys. Rev.*, **D8**, 1010 (1973).

1. ТЕРМОДИНАМИКА ЧЕРНЫХ ДЫР

17. *Hawking S.W.*, *Phys. Rev. Lett.*, **26**, 1344 (1971).
18. *Hawking S.W.*, *Comm. Math. Phys.*, **25**, 152 (1972).
19. *Hawking S.W.*, в сборнике *Black Holes*, eds. B.S. DeWitt and C.M. DeWitt, Gordon & Breach, New York.
20. *Hawking S.W.*, *Nature*, **248**, 30 (1974).
21. *Hawking S.W.*, *Comm. Math. Phys.*, **43**, 199 (1975).
22. *Hawking S.W.*, *Phys. Rev.*, **D13**, 191 (1976).. (Статья 3 настоящего сборника.)
23. *Hawking S.W.*, *Ellis G.F.R.*, *The Large Scale Structure of Space-time*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973. (Имеется перевод: С. Хокинг, Дж. Эллис, Крупномасштабная структура пространства-времени, "Мир", М., 1977.)
24. *Hawking S.W.*, *Penrose R.*, *Proc. Roy. Soc.*, **A314**, 529 (1970).
25. *Isham C.J.*, *Penrose R.*, *Sciama D.W.*, eds. *Quantum Gravity*, an Oxford Symposium, Oxford University Press, Oxford, 1975.
26. *Israel W.*, *Phys. Rev.*, **164**, 1776 (1967).
27. *Israel W.*, *Comm. Math. Phys.*, **8**, 245 (1968).
28. *Kerr R.P.*, *Phys. Rev. Lett.*, **11**, 237 (1963).
29. Пандау Л.Д., Лифшиц Е.М., *Статистическая физика*, "Наука", М., 1976.
30. *Lynden-Bell D.*, *Wood R.*, *Mon. Not. R.Astron. Soc.*, **138**, 495 (1968).
31. *Misner C.W.*, *Phys. Rev. Lett.*, **28**, 994 (1972).
32. *Muller von Hagen H.*, *Robinson D.C.*, *Seifert H.J.*, *Gen. Rel. Grav.*, **4**, 53 (1973).
33. *Newman E.T.*, *et al.*, *Journ. Math. Phys.*, **6**, 918 (1965).
34. *Penrose R.*, *Revista Nuovo Cim.*, **1**, 252 (1969).
35. *Penrose R.*, *Floyd R.M.*, *Nature*, **229**, 177 (1971).
36. *Price R.H.*, *Phys. Rev.*, **D5**, 2419 (1972).
37. *Price R.H.*, *Phys. Rev.*, **D5**, 2439 (1972).
38. *Robinson D.C.*, *Phys. Rev.*, **D10**, 458 (1974).
39. *Robinson D.C.*, *Phys. Rev. Lett.*, **34**, 905 (1975).
40. *Sciama D.W.*, *Modern Cosmology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1971. (Имеется перевод: Д. Шама, Современная космология, "Мир", М., 1973.)
41. Старобинский А.А., *ЖЭТФ*, **64**, 48 (1973).
42. *Unruh W.G.*, *Phys. Rev.*, **D10**, 3194 (1974).
43. *Vishveshwara C.V.*, *Journ. Math. Phys.*, **9**, 1319 (1968).
44. *Wald R.M.*, *Ann. Phys.*, **82**, 548 (1974).
45. Зельдович Я.Б., *Письма в ЖЭТФ*, **14**, 270 (1971).
46. Зельдович Я.Б., *ЖЭФ*, **62**, 2076 (1972).
47. *DeWitt B.S.*, *Phys. Repts.*, **C19**, 297 (1975). (Статья 2 настоящего сборника.)

Статья 2

Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени*

Б.С. де Бумм

*DeWitt B.S.,** Physics Reports, 19C, 295 (1975)*

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Квантовая теория поля для случая многообразий (плоских или искривленных), отличных от пространства Минковского, предсказывает некоторые необычные физические эффекты, которые не имеют прямых аналогов в обычном пространстве-времени Минковского. В настоящем обзоре рассмотрены следующие примеры: 1) эффект Казимира; 2) излучение ускоренно движущегося проводника; 3) рождение частиц в многообразиях с горизонтами, включая стационарные черные дыры и черные дыры, образовавшиеся в результате коллапса. В последних примерах кривизна непосредственно связана с материей через тензор напряжений и является причиной рождения реальных частиц. Однако она порождает также серьезные расходимости в энергии-импульсе вакуума. В обзоре дан анализ этих расходимостей и рассмотрены методы работы с ними.

* Этот обзор является расширенным вариантом доклада, прочитанного автором на конференции Американского физического общества, отделение элементарных частиц и теории поля, в Вилльямсбурге, Вирджиния, сентябрь 1974. Финансовую поддержку при его подготовке оказали отчасти Национальная организация содействия развитию науки и отчасти транспортный фонд НАТО.

**Center for Relativity, Department of Physics, University of Texas, Austin, Texas, USA.

© North-Holland Publishing Company, 1975.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

1. ВВЕДЕНИЕ

Для физиков, исследующих элементарные частицы, существование группы Пуанкаре как группы локальных симметрий пространства-времени чрезвычайно важно в том отношении, что помогает им классифицировать возникающие идеи и строить теории, описывающие экспериментальные факты, — от чистой феноменологии и дисперсионных соотношений до аксиоматической теории поля. В самом деле, в настоящее время студентов учат, что элементарные частицы есть не что иное, как определенные представления группы Пуанкаре.

За любое пристрастие приходится расплачиваться. Физики хорошо усвоили этот урок еще в начале века. Многие из нас сознают, что квантовая теория поля не может в конце концов основываться на группе Пуанкаре. Что действительно необходимо, так это теория или хотя бы подход, которые учитывали бы полностью общековариантную эйнштейновскую точку зрения на пространство-время как на риманово многообразие.

Я не ставлю перед собой цель представить здесь такую теорию; она до сих пор не существует по крайней мере как некоторая последовательная теория. То, что я собираюсь сделать, — это описать несколько различных, но родственных физических процессов, в которых существенным образом учитывается структура пространственно-временного многообразия, они показывают, какие существенные элементы должны входить в эту теорию. Эти примеры подобраны с точки зрения их поучительности, а также общего интереса, и, как я надеюсь, они убедят читателя не только в том, что последовательную теорию в конце концов можно построить, но и в том, что эта теория будет необыкновенно красива.

Основа любой теории взаимодействующих полей — это набор токов, которые описывают взаимодействие. Токи в общей теории относительности являются компонентами тензора напряжений¹⁾. При построении квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени основная задача, я бы даже сказал *главная проблема*, заключается в том, чтобы разобраться, что такое тензор напряжений. Тен-

¹⁾ В отечественной литературе обычно употребляется термин тензор энергии-импульса. Мы оставляем терминологию автора. — Прим. перев.

$$2\delta = \frac{1}{2} \int [\delta \varphi (F \varphi) + \varphi \delta (F \varphi)] dV = \frac{1}{2} \varphi F \varphi - \frac{1}{2} \int (\varphi F \varphi - \varphi F \varphi) dV = 0$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Б.С. ДЕ ВИТТ

$$F\varphi = 0$$

зор напряжений, как и любой ток, является билинейным произведением операторнозначных обобщенных функций (операторов поля) и, следовательно, величиной бессмысленной. Проблема состоит в том, чтобы придать этой величине смысл с помощью некоторой процедуры вычитания.

Процедура вычитания, или регуляризации, использует обычно вакуумное состояние. Физики, изучающие элементарные частицы, знают, что такое вакуум: это (с точностью до вырождений, нарушающих симметрию) тривиальное представление группы Пуанкаре. Физики, изучающие общую теорию относительности, не так удачливы. Из-за отсутствия геометрических симметрий они имеют в своем распоряжении много "вакуумов", из которых необходимо сделать выбор.

1.1. Базисные функции, вакуумные состояния и преобразования Боголюбова

Пусть φ — некоторое свободное линейное поле в искривленном пространстве-времени. Поле φ может быть либо бозонным, либо фермионным. Мы опустим любые индексы, которые может нести поле φ , и будем предполагать без потери общности, что оно реально (эрмитово). Динамические уравнения для поля имеют вид

$$F\varphi = 0, \quad (1)$$

где F является самосопряженным дифференциальным оператором в том смысле, что

$$\int \varphi_1^* (F \varphi_2) d^4 x = \int (F \varphi_1)^* \varphi_2 d^4 x; \quad (2)$$

здесь интегралы берутся по некоторой (открытой) области пространства-времени, а φ_1 и φ_2 — какие-либо гладкие комплексные функции, которые имеют компактные носители, принадлежащие этой области. Функционал действия для поля, который после варьирования дает уравнение (1), можно записать в следующем виде:

$$S = \frac{1}{2} \int \varphi (F \varphi) d^4 x; \quad (3)$$

иногда я буду его записывать более просто:

$$S = \frac{1}{2} \varphi F \varphi. \quad (4)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Здесь мы опять опустили индексы, именно обозначения пространственно-временных координат x^μ ; по отсутствующим индексам подразумевается суммирование — *интегрирование*.

Поскольку оператор F самосопряженный, то всегда существует двусторонний векторный дифференциальный оператор $\overleftrightarrow{f}^\mu$, который связан с F следующим образом:

$$\int_{\Omega} [\psi_1^* (F \psi_2) - (F \psi_1)^* \psi_2] d^4x = \int_{\partial\Omega} \psi_1^* \overleftrightarrow{f}^\mu \psi_2 d\Sigma_\mu, \quad (5)$$

где Ω — произвольная компактная область пространства-времени с гладкой границей $\partial\Omega$; ψ_1, ψ_2 — две произвольные гладкие комплексные функции, определенные в открытой области, содержащей Ω , и $d\Sigma_\mu$ — ориентированный элемент поверхности $\partial\Omega$ с нормалью, направленной наружу. Пусть u_1 и u_2 — два произвольных комплексных решения уравнений поля (1), и пусть Σ — произвольная полная гиперповерхность Коши для этих уравнений. (Мы предполагаем, что интересующая нас область пространства-времени такова, что для нее полные гиперповерхности Коши существуют.) Тогда оператор $\overleftrightarrow{f}^\mu$ можно использовать для определения внутреннего произведения функций u_1 и u_2 , инвариантного относительно гладких деформаций и смещений гиперповерхности Σ :

$$\langle u_1, u_2 \rangle = -i \int_{\Sigma} u_1^* \overleftrightarrow{f}^\mu u_2 d\Sigma_\mu. \quad (6)$$

Это внутреннее произведение для бозонных полей не будет положительно определенным.

Теперь замысел состоит в том, чтобы ввести полный (с точностью до калибровочных преобразований) набор сопряженных пар решений u_i и u_i^* уравнений (1), удовлетворяющих следующим условиям ортогональности¹⁾:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij}, \quad \langle u_i^*, u_j \rangle = 0. \quad (7)$$

¹⁾ Некоторые из переменных, для которых используются индексы i, j , могут быть непрерывными. Для таких переменных символ δ_{ij} понимается как δ -функция.

Число таких наборов бесконечно. Выберем один из них. Разложим поле φ следующим образом¹⁾:

$$\varphi = \sum_i (a_i u_i + a_i^* u_i^*). \quad (8)$$

Используя канонические (анти)коммутационные соотношения, или, что более элегантно и явно ковариантно, используя пайерлсово [40] определение (анти)коммутатора, легко показать, что операторные коэффициенты в разложении (8) удовлетворяют (анти)коммутационным соотношениям:

$$[a_i, a_j^*]_{\pm} = \delta_{ij}, \quad [a_i, a_j]_{\pm} = 0. \quad (9)$$

Эта операторная алгебра служит для того, чтобы стандартным образом определить фоковское пространство и "вакуумное" состояние:

$$a_i | \text{vac} \rangle = 0 \quad (10)$$

Заметим, что в описанном выше построении кривизна пространства никак себя не проявляет. Поэтому мы можем немедленно приступить к (формальному) вычислению матричных элементов тензора напряжений. Тензор напряжений определяется функциональным дифференцированием действия по метрическому тензору

$$T^{\mu\nu}(\varphi, \varphi) \equiv 2 \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = \varphi \frac{\delta F}{\delta g_{\mu\nu}} \varphi. \quad (11)$$

На самом деле эта форма является тензорной *плотностью*, т.е. включает множитель $g^{1/2}$, где $g \equiv -\det(g_{\mu\nu})$, и я всегда буду его подразумевать.

¹⁾ Звездочка для операторов означает эрмитово сопряжение, для c -чисел или матриц, состоящих из c -чисел, — обычное комплексное сопряжение. Крестик будет применяться только для матриц независимо от того, состоят ли они из c -чисел или из операторов, и означает, что наряду с комплексным (эрмитовым) сопряжением элементов матрицы проводится ее транспонирование [ср. (15)].

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Простейшим матричным элементом является величина "вакуумного" среднего, которая, как нетрудно видеть, определяется выражением¹⁾

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \sum_i T^{\mu\nu}(u_i, u_i^*). \quad (12)$$

Единственная трудность, связанная с этим выражением, заключается в том, что эта сумма расходится. Простейший способ избежать эту трудность заключается в вычитании расходимости и "регуляризации". $T^{\mu\nu}$ с помощью формулы

$$T_{\text{reg}}^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} - \langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}; \quad (13)$$

здесь подразумевается, что вычитание проводится в каждой моде. Это эквивалентно нормальному упорядочению билинейной формы $T^{\mu\nu}(\phi, \phi)$ по отношению к разложению (8). Трудность, однако, состоит в том, что разные разложения приводят к различным, вообще говоря не эквивалентным, нормальным упорядочениям. Например, если \bar{u}_i являются базисными функциями, соответствующими другому полному набору, то они будут связаны с функциями u_i соотношением

$$\bar{u}_i = \sum_j (\alpha_{ij} u_j + \beta_{ij} u_j^*), \quad (14)$$

где коэффициенты α_{ij}, β_{ij} удовлетворяют матричному соотношению (индексы опущены):

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta^* & \alpha^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha^\dagger & \pm \beta^\sim \\ \pm \beta^\dagger & \alpha^\sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad (15)$$

здесь знак $+$ ($-$) соответствует фермионному (бозонному) полю, а тильда обозначает транспонирование матриц. Если коэффициенты β_{ij} равны нулю, то "вакуум" остается неизменным, однако если β_{ij} не равны нулю, то для операторов мы имеем преобразование Боголюбова:

$$\bar{a}_i = \sum_j (\alpha_{ij}^* a_j \pm \beta_{ij}^* a_j^*), \quad (16)$$

причем

$$\langle \bar{a}_i^* \bar{a}_i \rangle_{\text{vac}} = \sum_j |\beta_{ij}|^2. \quad (17)$$

¹⁾ Здесь всегда подразумевается, что форма $T^{\mu\nu}$ симметризована, так что $T^{\mu\nu}(u_1, u_2) = T^{\mu\nu}(u_2, u_1)$.

Это означает, что старый "вакуум" содержит новые "частицы". Он может содержать даже бесконечное число новых "частиц", в этом случае два фоковских пространства нельзя связать друг с другом унитарным преобразованием.

1.2. Векторы Киллинга и положительно-частотные функции

Бдительный читатель возразит сейчас, что в приведенном выше обсуждении был опущен один важный критерий. Именно, необходимо использовать базисные функции, которые разделяют *положительно-частотные* и *отрицательно-частотные* решения. Это разделение можно осуществлять только тогда, когда в рассматриваемом пространстве-времени имеют смысл понятия положительных и отрицательных частот. Для того чтобы эти понятия имели смысл, геометрия пространства-времени должна быть стационарной, или, на языке специалистов, пространство-время должно допускать глобальное времениподобное векторное поле Киллинга. Оно может не допускать наличие такой симметрии, как группа Пуанкаре, но должно быть устроено так, чтобы допускать по крайней мере однопараметрическую группу времениподобных движений.

Гэри Гиббонс [28] дал следующее полностью ковариантное описание ситуации, когда имеется векторное поле Киллинга K^μ . Во-первых, сохраняется величина

$$K \equiv - \int_{\Sigma} K_{\mu} T^{\mu\nu} d\Sigma_{\nu}, \quad (18)$$

т.е. она не зависит от выбора гиперповерхности Коши Σ . Во-вторых, хотя оператор K сам по себе является плохо определенным, он приводит к хорошо определенным коммутационным соотношениям с компонентами поля:

$$[\varphi, K]_- = i \mathcal{L}_K \varphi \quad (\text{с точностью до калибровочных преобразований, если таковые имеются}), \quad (19)$$

где \mathcal{L} обозначает производную Ли. Поскольку алгебра Ли для некоторого вектора Киллинга абелева, то группа, которую эта алгебра порождает, просто экспоненциальна, а базисные функции u_i можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли соотношениям

$$\mathcal{L}_K u_i = -i \kappa_i u_i, \quad \mathcal{L}_K u_i^* = i \kappa_i u_i^*, \quad (20)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

где κ_i — константы. Если векторное поле K^μ является глобально времениподобным, то можно ввести координату t , такую, что метрика от нее не зависит и по отношению к ней вектор K^μ имеет вид $(K^\mu) = (1, 0, 0, 0)$. Более того, векторное поле K^μ можно выбрать таким образом, что t дает непосредственно собственное время, измеренное в каждом случае некоторыми часами (например, в асимптотически плоском пространстве-времени часами на бесконечности), 4-скорость которых всегда остается параллельной вектору K^μ . В этом случае функции u_i можно выбрать так, что все константы κ_i будут положительны; κ_i назовем энергией одной частицы в i -й моде по отношению к выбранным выше часам. Всюду далее для обозначения энергии одной частицы вместо κ_i я буду использовать символ ϵ_i ; уравнения (20) примут тогда следующий вид:

$$\partial u_i / \partial t = -i \epsilon_i u_i, \quad \partial u_i^* / \partial t = i \epsilon_i u_i^*. \quad (21)$$

Здесь u и u^* положительно- и отрицательно-частотные решения, или соответственно положительно- и отрицательно-энергетические решения.

С помощью этих базисных функций и связанных с ними операторов a_i, a_i^* можно теперь определить вакуум, который является вакуумом на самом деле. Оператор K можно сделать хорошо определенным с помощью нормального упорядочения. Результат для энергии я буду обозначать символом E :

$$E = - \int_{\Sigma} K_\mu : T^{\mu\nu} : d\Sigma_\nu. \quad (22)$$

Тогда вакуум для нее будет соответствовать нулевой точке отсчета

$$E | \text{vac} \rangle = 0, \quad (23)$$

а a_i^*, a_i будут операторами, повышающими и понижающими энергию,

$$[a_i, E]_- = \epsilon_i a_i. \quad (24)$$

Если L^μ — другое векторное поле Киллинга, которое коммутирует с K^μ , тогда базисные функции могут быть выбраны таким образом, чтобы также удовлетворять соотношениям

$$\mathcal{L}_L u_i = -i \lambda_i u_i, \quad (25)$$

где λ_i — константы. Операторы a_i^* , a_i тогда также являются повышающими и понижающими для соответствующей сохраняющейся величины:

$$[a_i, L]_- = \lambda_i a_i, \quad (26)$$

$$L \equiv -\int L_\mu : T^{\mu\nu} : d\Sigma_\nu. \quad (27)$$

В общем случае, если имеется некоторое множество независимых векторных полей Киллинга, порождающих алгебру Ли, u_i можно выделить из условия, что они дают неприводимые представления этой алгебры.

1.3. Неудовлетворительность традиционных подходов

Все вышеизложенное соответствует традиционному подходу, принятому в физике элементарных частиц. Единственное огорчение, которое такой подход вызывает, так это то, что он *неверен*. Проявляется это не в ошибочности математического аппарата, а просто в том, что этот подход дает грубо неадекватное обоснование теории. Ниже приведено лишь несколько примеров, когда традиционный подход терпит неудачу.

1. Векторное поле Киллинга, времениподобное или пространственноподобное, может отсутствовать совсем. Это общая ситуация. Как поступать в этом случае, неизвестно, кроме, может быть, случая, когда имеется приближенное векторное поле Киллинга, которое становится точным асимптотически. Кажется весьма маловероятным, что в данном случае будет полезна корпускулярная картина, за исключением областей, где имеют место квазиadiaбатические условия (которые на практике, конечно, являются очень важными и типичными областями!).

2. Векторное поле Киллинга может быть глобальным, но не везде времениподобным. В этом случае возможны два варианта.

а) Можно вырезать из пространства-времени область, где векторное поле Киллинга невремениподобно. Это соответствует определенному молчаливому соглашению о некотором граничном условии.

б) Можно оставить область, где векторное поле Киллинга невремениподобно, но попытаться разумно определить вакуум, приводя для этого сильные физические аргументы. Ниже я приведу примеры, где используются обе процедуры.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

3. Пространство-время может быть стационарно только в ограниченных областях. Если каждая область обладает полными гиперповерхностями Коши, тогда в каждой из них можно построить локальное времениподобное векторное поле Киллинга и определить свой вакуум. Предположим, что имеются две точки области, которые связаны между собой причинно. Я буду называть одну из областей *in*-областью, а причинно связывающую с ней область *out*-областью и обозначу соответствующие им вакуумы $|in, vac\rangle$ и $|out, vac\rangle$. Теперь возникает вопрос: по отношению к базисным функциям какой из областей нормально упорядочен тензор напряжений? (Заметим, что базисные функции, однажды определенные в каждой из областей, могут распространяться в пространстве-времени, хотя положительно- или отрицательно-частотными функциями они будут только в первоначальных областях определения.) Наверное, ответом на этот вопрос (в соответствии с принципом относительности или демократии, или любым другим) является — *никакой*. Ни одной из областей нельзя отдать предпочтение. Более того, невозможно определить тензор напряжений так, чтобы а) он был нормально упорядочен в обеих областях; б) его матричные элементы являлись гладкими функциями; в) он везде удовлетворял уравнению непрерывности

$$T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0. \quad (28)$$

Таким образом, условимся, что *тензор напряжений всегда остается без нормального упорядочения* и что мы только попытаемся регуляризовать его с помощью процесса вычитания, который сохраняет уравнение (28). В настоящем случае, например, мы могли бы сделать следующее. Предположим, что в *in*-области частицы отсутствуют. Тогда вектор состояния системы совпадает с $|in, vac\rangle$. Мы можем приступить к определению следующего тензора:

$$\langle in, vac | T^{\mu\nu} | in, vac \rangle - \langle out, vac | T^{\mu\nu} | out, vac \rangle. \quad (29)$$

(Здесь опять подразумевается процедура вычитания в каждой моде, действие которой может быть хорошо определено.) В *out*-области этот тензор описывает распределение и поток энергии частиц, которые порождены нестационарной геометрией в пространстве между двумя областями.

Последний пример очень хорошо иллюстрирует неудовлетворительность наивного подхода, кроме того, демонстрирует, что ни одна из

предложенных процедур не соответствует тому, что можно назвать действительно глубокими достижениями теории. Рассмотрим тензор (29). Хотя он описывает физическую ситуацию в *out*-области, в *in*-области он ее, конечно, не описывает, поскольку, несмотря на то, что в этой области частицы отсутствуют, выражение (29) в нуль не обращается. В *in*-области он равен тензору, который описывает распределение и поток энергии частиц (который должен был бы существовать в *in*-области для того, чтобы в *out*-области свободных частиц не было), *умноженному на* (-1) . Конечно, *этот* тензор не может рассматриваться как источник гравитационного поля. Далее, в *out*-области он также не может рассматриваться как истинный источник, поскольку он описывает только реальные частицы и не дает никакой информации о вкладе виртуальных частиц. Несомненно, что кривизна будет порождать эффекты, аналогичные эффектам поляризации вакуума в квантовой электродинамике.

Как нам тогда определить истинный источник? Какой тензор, удовлетворяющий формально уравнению (28), мы можем вычесть из $T^{\mu\nu}$, чтобы образовать оператор, который математически хорошо определен и в то же время описывает как дисперсионные, так и реактивные эффекты, связанные со взаимодействием кривизны и поля? В заключительном разделе этой работы я укажу на некоторые предложения, которые сделаны по этому поводу, однако вначале я хочу описать несколько конкретных физических примеров. Ничто лучше конкретного примера не поможет нам почувствовать, действительно ли мы идем правильным путем.

2. ЭФФЕКТ КАЗИМИРА

2.1. Проблема энергии вакуума

Этот хорошо известный эффект, предсказанный и популяризованный Казимиром [10], а затем экспериментально подтвержденный в лабораториях фирмы Филипс, на первый взгляд не имеет никакого отношения к кривизне.

В вакууме две чрезвычайно чистые, нейтральные, параллельные, микроскопически плоские, проводящие поверхности очень слабо притягиваются с силой, которая убывает обратно пропорционально четвертой степени расстояния между ними.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Однако точно так же, как кривизну можно рассмотреть в качестве возмущения, которое порождает пространство-время с искривлением, устройство Казимира можно рассматривать как аппарат, возмущающий пространство-время нейтральными проводниками. Хотя из-за того, что сила, как оказалось, не зависит от таких деталей, как молекулярный состав проводников, этот эффект был впервые рассчитан как некоторый случай сил Ван-дер-Ваальса, Казимир быстро понял, что эффект притяжения можно рассчитать, исходя из задачи об энергии вакуума, и в настоящее время на занятиях со студентами используют именно этот метод расчета. Правда, эта энергия чрезвычайно мала: она на много порядков меньше той величины энергии, которая создавала бы гравитационное поле, которое кто-либо собирается обнаружить. Но можно легко построить мысленный эксперимент, в котором закон сохранения энергии будет нарушаться, если эту энергию не включать в источник гравитационного поля. Физики-релятивисты могут заметить, что рассматриваемая здесь плотность энергии *отрицательна* и, следовательно, соответствующий тензор напряжений нарушает классические теоремы об энергии, так существенные для теории черных дыр¹⁾. Все прочие физики заметят, что энергия в эффекте Казимира — это энергия только вакуума; никаких реальных частиц он не включает, только виртуальные. Однако эксперименты свидетельствуют, что эту крошечную энергию мы должны рассматривать вполне серьезно.

Насколько я осведомлен, первый, кто вычислил действительную плотность энергии (т.е. T^{00} -компоненту тензора напряжений) в противоположность полной энергии между проводниками, был Ларри Форд [23]. Метод Форда можно также применить для вычисления и других компонент тензора напряжений, поэтому я хочу изложить эти очень красивые результаты. Однако это я сделаю позже, а сначала нужно сделать обзор того, какова формальная ситуация для вакуумного среднего тензора напряжений без нормального упорядочения в обычном невозмущенном пространстве Минковского.

¹⁾ Отрицательность энергии, оказывается, зависит от геометрии проводника. Бойер [4] и Дэвис [17] показали, что энергия вакуума внутри проводящей сферы положительна.

2.2. Регуляризация тензора напряжений

Поле, рассматриваемое в настоящей задаче, резюмируется, электромагнитное. Простейшие базисные функции u_i , которые можно ввести, это бегущие плоские волны с линейной поляризацией. Сумма (12) для этих волн расходится, поэтому мы должны регуляризовать ее. С точек зрения аксиоматической теории поля, а также с эвристической в формальное выражение для $T^{\mu\nu}$ удобно ввести не сами операторы поля, а операторы, которые размазаны с помощью гладкой функции $s(x)$ с компактным носителем: ⁽²⁾

$$\Phi_s(x) \equiv \int s(x-y) \phi(y) d^4 y \quad (\text{координаты Минковского}). \quad (30)$$

Этот оператор хорошо определен, и можно исследовать поведение его (конечного) вакуумного среднего как функцию размера носителя $s(x)$, когда он стремится к нулю. Такую процедуру можно также применить в искривленном пространстве-времени, однако в этом случае регуляризованный тензор $T^{\mu\nu}$, вообще говоря, не будет удовлетворять условию (28), кроме как в описанном выше пределе. В рассматриваемом нами случае уравнение (28) удовлетворяется тривиально, поскольку пространство Минковского однородно.

Я хочу подчеркнуть тот факт, что этот метод регуляризации зависит от выбора системы координат. Функция s не может быть одновременно лоренц-инвариантной функцией интервала $(x-y)$ и иметь компактный носитель. По моему мнению, это увеличивает ценность данного метода. Так называемые ковариантные схемы регуляризации имеют своей единственной целью чисто техническое исключение расходящихся частей тензора $T^{\mu\nu}$; эти схемы слишком формальны, чтобы иметь какой-нибудь определенный физический смысл ¹⁾. Ме-

¹⁾ Популярные ковариантные рассуждения, служащие для избавления от $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$, выглядят следующим образом: величина $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ должна быть объектом, который преобразуется как тензор при лоренцевых преобразованиях и не зависит от поля и выбора системы координат. Единственными объектами такого рода являются произведения, содержащие метрический тензор Минковского $\eta^{\mu\nu}$. В настоящем случае коэффициент при этом тензоре должен быть равен нулю, поскольку максвелловский тензор напряжений имеет нулевой след. Следовательно, $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = 0$ даже еще до того, как проведено нормальное упорядочение! Ясно, что здесь мы полностью отказываемся от идеи рассматривать электромагнитное поле как набор гармонических осцилляторов.

²⁾ $\Phi = \int s(x) \phi(y) d^4 y$, где $s(x)$ — гладкая функция с компактным носителем.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

тод, зависящий от системы координат, полезен в том смысле, что он подчеркивает изъяны, связанные с тензором $T^{\mu\nu}$, и в то же время позволяет достичь некоторого прогресса в элементарном или эвристическом физическом понимании структуры энергии вакуума. Эвристические соображения всегда полезны, когда мы пытаемся проникнуть в глубь новой проблемы; ниже я еще раз подчеркну значение зависимости регуляризации от выбора системы координат.

Метод регуляризации эквивалентен процедуре размазывания, однако для применения на практике легче просто разделить точки, в которых определены два оператора ϕ , входящие в $T^{\mu\nu}$, а затем исследовать тензор, когда эти точки стремятся друг к другу. Этот метод очевидным образом зависит от выбора системы координат, поскольку интервал, разделяющий точки, вводит некоторое выделенное направление. Я буду выбирать разделяющий интервал времени-подобным, параллельным оси t (или x^0). Легко видеть, что это эквивалентно введению в сумму (12) осциллирующего множителя вида $\exp(i\epsilon_i/\Lambda)$, причем Λ — величина, обратная длине разделяющего интервала. По существу Λ является параметром обрезания для больших энергий, и этот метод совпадает со стандартной процедурой вычисления энергии Казимира.

Сумму (12), включающую в себя осциллирующий множитель, легко оценить. Получаем

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \frac{3\Lambda^4}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (31)$$

Это выражение имеет в точности тот же вид, что и тензор напряжений покоящегося в выбранной системе координат фотонного газа (полный 3-импульс равен нулю).

Введем теперь в рассмотрение параллельные проводники и повторим описанную выше процедуру. В этом случае естественно воспользоваться некоторой специальной системой координат, поскольку сами проводники вынуждают к этому. (См., однако, ниже.) Единственное отличие от уже приведенного вычисления заключается в том, что базисные функции u_i теперь другие. Можно считать, что проводники являются бесконечными плоскостями. Тогда можно выбрать функции

u_i , такие, что они имеют вид волн, бегущих параллельно плоскостям, и стоячих волн в перпендикулярном направлении. Единственная сложность заключается в том, что необходимо, конечно, наложить граничные условия, соответствующие электрическому и магнитным полям вне идеальных проводников, и не упустить ни одну из мод. Вакуум между пластинами уже не представляет собой вакуум, соответствующий невозмущенному пространству Минковского, поскольку функции u_i теперь другие. В правой части соотношения (12) трехмерный интеграл (плюс поляризационные суммы) сводится к двумерному интегралу и бесконечной дискретной сумме. Результат (для больших Λ) имеет вид

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \frac{3\Lambda^4}{\pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{720 a^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

где a — расстояние между проводящими поверхностями, а направление оси x^3 выбрано перпендикулярно поверхностям. Здесь следует заметить, что я использую единицы, в которых $\hbar = c = 1$, и метрику с положительной сигнатурой: $(\eta_{\mu\nu}) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

2.3. Свойства тензора напряжений Казимира

Выражение (3.2) имеет несколько замечательных свойств:

1. Та его часть, которая зависит от обрезания, совпадает с выражением (31) для невозмущенного вакуума. Эту часть можно попытаться идентифицировать, по крайней мере предположительно, с некоторой неприводимой частью, которую можно будет обнаружить во всех матричных элементах тензора напряжений и при любых условиях. Действительно, ниже мы обнаружим, что эта часть возникает в точности в том же самом виде при наличии искривления пространства-времени [см. (249)]. Поскольку она универсальна, то ее можно отбросить, оставляя, как в настоящем случае, конечный остаток. Более глубоким соображением для ее отбрасывания в настоящем случае является то, что конечная часть, и только конечная часть, является величиной, наблюдаемой в лаборатории.

2. Конечный остаток не зависит не только от обрезания, но и от системы отсчета. Конечно, сами по себе проводники выделяют ось x^3 ,

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

однако они оставляют совершенно произвольным выбор осей x^0 , x^1 и x^2 . Конечная часть тензора $\langle T_{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ остается неизменной для бустов произвольной величины в любых направлениях, параллельных плоскости (x^1, x^2) . Физически это означает, что идеально плоский проводник остается таковым при любом своем движении, параллельном своей же поверхности, и что напряжения вакуума в окрестности такого проводника не меняются независимо от того, как быстро мы скользим по поверхности проводника, — результат, который наверняка бы понравился Эйнштейну.

3. И конечная, и расходящаяся части $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ удовлетворяют условию равенства нулю следа: $T^\mu_\mu = 0$.

4. И конечная, и расходящаяся части не зависят от выбора точки в пространстве-времени, т.е. постоянны. Для конечной части это свойство априори не является необходимым, и когда оно было впервые открыто, то вызвало некоторое удивление. Инвариантность физического устройства по отношению к сдвигам в направлениях x^0 , x^1 и x^2 гарантирует, конечно, что величина $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ будет независимой от этих координат, однако она могла бы оставаться зависимой от x^3 . На самом деле величины $\langle E^2 \rangle_{\text{vac}}$ и $\langle H^2 \rangle_{\text{vac}}$, где E и H — векторы электрического и магнитного полей, сами по себе действительно зависят от x^3 , причем зависимость в окрестности каждого из проводников имеет вид¹⁾

$$\left. \begin{aligned} \langle E^2 \rangle_{\text{vac}} &= \frac{3 \Lambda^4}{\pi^2} - \frac{3}{16 \pi^2 z^4} \\ \langle H^2 \rangle_{\text{vac}} &= \frac{3 \Lambda^4}{\pi^2} + \frac{3}{16 \pi^2 z^4} \end{aligned} \right\} \quad z \ll a; \quad (33)$$

здесь z — расстояние от проводника. И только, когда E и H образуют комбинацию, в которой они входят в тензор напряжений, зависимость от x^3 пропадает. В силу такого стечения обстоятельств, это не означает, что зависимость от x^3 является ненаблюдаемой. В принципе она приводит к (очень) слабым, зависящим от x^3 , сдвигам уровней энергий атомов вблизи проводника (к тому же сдвиги

¹⁾ В безразмерных величинах.

возникают из-за отражения атомов в проводнике!). Однако это никак не влияет на гравитационное поле.

5. Относительные величины $(0, 0)$ - и $(3, 3)$ -компонент конечной части тензора $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ и вид их зависимости от a как раз таковы, какими они должны были бы быть, если бы вакуум был газом, заключенным в пространстве между проводниками, конечно, газом со странными свойствами — отрицательной плотностью энергии, отрицательным давлением (напряженностью) в направлении x^3 , положительным давлением в направлениях x^1 и x^2 — однако газом, который тем не менее удовлетворяет термодинамическому закону:

$$dE = T dS - p dV. \quad (34)$$

Следовательно, если медленно ($dS = 0$) раздвигать проводники, то работа, совершаемая против давления, приводит, очевидно, к увеличению энергии вакуума. Максвелл был бы очень рад этому результату. Он заставляет почти поверить в существование эфира!

Если бы я был сообразительнее (или если бы я верил в эфир), я должен был бы предвидеть все эти свойства заранее, и тогда я бы знал, какой вид должна иметь величина $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ еще до того, как я сел бы ее вычислять. Соображения симметрии гарантируют, что конечная часть $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ должна быть диагональна, причем компоненты $(1, 1)$ и $(2, 2)$ равны. Свойство 2 требует, чтобы компоненты $(0, 0)$ и $(1, 1)$ были равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку. Свойство 3 тогда дает относительную величину компоненты $(3, 3)$ и вместе с условием непрерывности (28) обеспечивает условие 4. Наконец, зависимость от a следует из свойства 5. Зависимость от a может быть также получена из соображений размерности при условии, что известна постоянная Планка, поскольку константы \hbar и c являются единственными физическими константами, входящими в теорию. Неопределенными остаются только абсолютное значение и *знак* любой из ненулевых компонент. Они должны быть найдены с помощью вычисления (или эксперимента).

Одно последнее замечание: исчезновение конечной части $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ при $a \rightarrow \infty$ означает, что $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ сводится к вырождению (31) в бесконечном полупространстве с любой стороны от *единенного* плоского проводника. В самом деле, в этом можно убедиться непосредственно с помощью суммирования в (12) с базисными функциями, соответствующими этому полупространству. Поскольку эти базисные

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

функции отличаются от тех, которые соответствуют пустому пространству Минковского, то вакуум в полупространстве по-прежнему не совпадает с невозмущенным вакуумом. Например, выражения (33) остаются справедливыми и в этом случае.

2.4. Эффект Казимира как проблема, связанная со структурой многообразия.

Безмассовое скалярное поле

Метод вычисления в предыдущих примерах, в которых мы просто выделяли множество базисных функций, соответствующих необходимым граничным условиям, подчеркивает тот факт, что даже эффект Казимира в очень большой степени связан с проблемой структуры риманова многообразия. В каждом случае мы выделяли различные многообразия — слой, полупространство или пространство Минковского — и свойства вакуума зависели от нашего выбора. Это побуждает задать вопрос: действительно ли обнаруженные нами свойства зависят в первую очередь от многообразия или же они присущи электромагнитному полю? Ответ на этот вопрос в общем случае потребовал открытия целого нового направления исследований. Здесь я могу остановиться только на том, что я обнаружил в случае некоторого другого поля, а именно безмассового скалярного поля.

Какие граничные условия необходимо принять на поверхностях для многообразия, соответствующего слою, в случае скалярного поля? Кажется естественным положить поле на этих границах равным нулю. И все же это оставляет ощущение неудовлетворенности. Что является аналогом проводника в случае скалярного поля? В электромагнитной теории и из многолетних экспериментов, и из модельных построений мы знаем, что такое проводник. Мы не испытываем колебаний, когда накладываем стандартные граничные условия для электрического и магнитного полей, так как знаем, что эта теория согласована на самых разных уровнях. Действительно, Бойер [5] в своей работе по исследованию эффекта Казимира полагал, что электромагнитное поле в этом смысле уникально, т.е. нет поддающегося расчету аналога эффекта Казимира для полей с другими спинами. Итак, каковы факты?

Коротко говоря (вычисления элементарны), факты сводятся к следующему: величина вакуумного среднего для $T^{\mu\nu}$ внутри слоя при условии, что поле на границе обращается в нуль, имеет вид

$$\begin{aligned} \langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = & \frac{3 \Lambda^4}{2 \pi^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix} + \frac{\pi^2}{1440 a^4} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} + \\ & + \frac{\pi^2}{48 a^2} \frac{3 - 2 \sin^2(\pi z/a)}{\sin^4(\pi z/a)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (35) \end{aligned}$$

где z — расстояние от какой-либо из границ. Здесь опять появляется член, зависящий от выбора системы координат и обрезания, деленный теперь на 2, поскольку число мод уменьшилось наполовину. Однако вместо одного такого члена здесь их два, причем совершенно различных. Первый — это просто обычный тензор энергии-импульса Казимира (деленный на 2), а второй — это новый член, зависящий от точки в пространстве. Оба эти члена конечны; итак, какой из них неверен?

Главное, что вызывает сомнение, это то, что последний член расходится, если его интегрировать в направлении, перпендикулярном слою, и, следовательно, он приводит к бесконечной отрицательной полной энергии (на единицу площади). Бойер оказался прав по крайней мере в этом пункте. Причина, по которой он оказался прав, заключается в том, что не совсем правильно ставить в соответствие скалярному полю только половину мод из тех, что соответствуют электромагнитному полю. Электромагнитное поле имеет некоторое число мод, для которых магнитное поле является константой в направлении, перпендикулярном слою (x^1 и x^2 фиксированы); это не имеет аналога в случае скалярного поля. Эти моды при суммировании в (12) образуют вклад, который сокращает член, зависящий от z , в электромагнитном случае.

Однако не стоит ли нам вернуться к первопричинам, чтобы решить, как *должен* выглядеть тензор напряжений вакуума для скалярного поля, так же, как мы это сделали (постфактум) для электромагнитного поля? Какой ключевой пункт из аргументов, соответствующий

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

ских электромагнитному случаю, здесь опускается? Это тот факт, что условие $T_{\mu}^{\mu} = 0$ больше не выполняется. Вот этот пункт! Следовательно, мы должны использовать *конформно-инвариантное* скалярное поле, тензор напряжений которого действительно удовлетворяет этому условию [см. (232) и (233)]. Конечно, это некоторый трюк. Прямые вычисления показывают, что для конформно-инвариантного скалярного поля последний член в выражении (35) исчезает. Следовательно, в конце концов Бойер оказался неправ.

Однако, что можно сказать об аргументе, учитывающем число мод? В отсутствие кривизны базисные функции u_i одни и те же независимо от того, какой тензор напряжений мы используем. Более того, два тензора отличаются друг от друга на градиент и, следовательно, должны приводить к одной и той же полной энергии. Но на самом деле это не так. Интегралы энергии отличаются поверхностными членами на границе, именно это и приводит к различию тензоров напряжений.

Успех конформно-инвариантной теории в этом случае и тот факт, что она так хорошо имитирует результаты, соответствующие электромагнитному полю, дает представление о том, в какой мере ей можно доверять при рассмотрении более общих проблем, и при этом верить, что если эффекты, зависящие от спина, не доминируют, то результаты, полученные для этих проблем, будут согласовываться по крайней мере качественно, а очень часто и количественно с результатами для тех же проблем в случае электромагнитного поля. Поскольку со скалярным полем работать чрезвычайно просто, то я буду использовать его всюду ниже.

3. ПРОВОДНИКИ, ДВИЖУЩИЕСЯ С УСКОРЕНИЕМ

3.1. Рождение частиц движущимися границами

Эффект Казимира можно назвать структурным эффектом в плоском (неискривленном) многообразии. Прежде чем переходить к обсуждению эффектов, действительно обязанных кривизне, разрешите мне заняться примером, предложенным Эйнштейном, и вначале рассмотреть эффекты, вызванные ускорением. Используя термодинамический закон (34) для давления в вакууме Казимира, я требовал, чтобы

проводники двигались медленно. Если бы я допустил наличие некоторого заметного ускорения, то проводники стали бы излучать фотоны и энтропия внутри слоя стала бы возрастать. Вначале может показаться удивительным, что, ускоряя *нейтральный* проводник, можно рождаť фотоны, однако каждый сразу же вспомнит, что поверхностные слои реального проводника несут токи. Свободные электроны вблизи поверхности взаимодействуют с квантовыми флуктуациями электромагнитного поля так же, как они взаимодействуют с классическим полем, и образуют токи именно такой величины, которые гарантируют стандартные граничные условия. Поскольку граничных условий достаточно для того, чтобы определить все физические явления вне проводника, то вообще нет необходимости ссылаться на токи, как это делалось сейчас.

Чтобы увидеть, как все это работает на практике, рассмотрим для простоты безмассовое скалярное поле в плоском двумерном пространстве-времени. (В двумерном пространстве это поле автоматически конформно-инвариантно.) Введем координаты Минковского x и t . Предположим, что имеется проводник, или барьер, и что мировая линия его поверхности задана гладкой функцией $z(t)$, причем $|\dot{z}(t)| < 1$. Пусть область "справа" от барьера будет невозмущенной. Предположим, что поверхность (на самом деле точка) остается в покое в начале координат вплоть до момента $t = 0$, затем совершает различные ускоренные движения вплоть до момента $t = T$, а после этого движется равномерно. Соответствующая ситуация в пространстве-времени изображена на фиг. 1.

В областях I, II и II' используется естественный базис функций, которые имеют вид

$$u(t, x | \varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi \varepsilon}} \sin(\varepsilon x) e^{-i \varepsilon t}, \quad 0 < \varepsilon < \infty. \quad (36)$$

В областях II', III и IV естественный базис функций имеет вид

$$\bar{u}(\bar{t}, \bar{x} | \bar{\varepsilon}) \equiv u(\bar{t}, \bar{x} | \bar{\varepsilon}) = \frac{1}{\sqrt{\pi \bar{\varepsilon}}} \sin(\bar{\varepsilon} \bar{x}) e^{-i \bar{\varepsilon} \bar{t}}, \quad (37)$$

где \bar{x} и \bar{t} связаны с x и t с помощью лоренцева преобразования:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (1 - v^2)^{-1/2} [x - z(T) - v(t - T)], \\ v &= \dot{z}(T). \end{aligned} \quad (38)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\bar{t} = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} [t - T - v(x - z(T))].$$

Оба множества базисных функций можно распространить в другие области, однако тогда они потеряют свой простой вид. Распространение очень легко прослеживается в двумерном пространстве. Например, первый из базисов везде будет иметь следующий вид:

$$u(t, x | \varepsilon) = f_{\varepsilon}(x - t) + g_{\varepsilon}(x + t), \quad (39)$$

и то же будет для второго базиса. Функция g_{ε} полностью определяется уже областью I:

$$g_{\varepsilon}(x) = -\frac{1}{2i\sqrt{\pi\varepsilon}} e^{-i\varepsilon x}, \quad -\infty < x < \infty. \quad (40)$$



Ф и г. 1. Рождение частиц движущимся барьером.

В то же время функция f_{ε} определяется здесь (а также в областях II и III') только для положительных значений ее аргументов. Чтобы получить ее для отрицательных аргументов, необходимо использовать граничное условие

$$0 = u(t, z(t) | \varepsilon) = f_{\varepsilon}(z(t) - t) + g_{\varepsilon}(z(t) + t), \quad (41)$$

которое дает

$$f_{\epsilon}(z(t) - t) = \frac{1}{2i\sqrt{\pi\epsilon}} e^{-i\epsilon[z(t) + t]}. \quad (42)$$

Предположим, что вначале система находится в вакуумном состоянии. Тогда это состояние есть $|in, vac\rangle$ и удовлетворяет условию

$$a(\epsilon)|in, vac\rangle = 0 \text{ для всех } \epsilon, \quad (43)$$

где $a(\epsilon)$ — оператор уничтожения, отвечающий базисной функции $u(t, x|\epsilon)$. По отношению к базисным функциям $\tilde{u}(t, x|\bar{\epsilon})$ данный вектор не является вакуумным состоянием. Два этих базиса связаны преобразованием Боголюбова, которое может быть найдено для каждой функции $z(t)$ с помощью прямого (но утомительного) вычисления, использующего в областях II', III и IV уравнения (39), (40) и (42), а также свойство ортогональности базисных функций \tilde{u} . Базисные функции u , распространяющиеся в пространстве, имеют различный вид в каждой из областей II', III и IV. Область III — это область, где происходит рождение "фотонов". Именно здесь перемешиваются положительные и отрицательные частоты. В области IV восстанавливается равновесие и имеет место новый вакуум; функции u восстанавливают здесь свой статус чисто положительно-частотных функций, однако теперь каждая из них содержит две частоты; исходную частоту и частоту с доплеровским сдвигом, которая появляется за счет отражения первоначальной волны от движущегося барьера.

3.2. Постоянное ускорение

Существует один специальный вид ускоренного движения барьера, для которого имеется некоторое состояние поля, остающееся все время в равновесии, — это движение с постоянным (по абсолютной величине) ускорением. Этот случай, который удобно изучать в координатной системе Риндлера [42], впервые проанализировал Фуллинг [24]. Пусть

$$t = e^{\xi} \operatorname{sh} \eta, \quad x = e^{\xi} \operatorname{ch} \eta. \quad (44)$$

Тогда интервал в пространстве Минковского может быть записан в следующей форме:

$$ds^2 = e^{2\xi} (-d\eta^2 + d\xi^2), \quad (45)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

которая, как видно, конформно связана с обычным выражением для элемента длины. Новые координаты, однако, покрывают только ту область (двумерного) пространства Минковского, для которой $x > |t|$. Мировая линия барьера будет определяться условием $\xi = \zeta = \text{const}$. Величина его абсолютного ускорения равна e^{-s} . И вообще, любой наблюдатель, который остается при постоянной фиксированной величине координаты ξ , будет иметь абсолютное ускорение, равное $e^{-\xi}$.

Причина, по которой в этом случае может существовать равновесное состояние для поля, заключается в том, что подмногообразие $x > |t|$ обладает глобальным времениподобным векторным полем Киллинга, которое параллельно мировой линии барьера, а именно (контрвариантный) вектор $(1, 0)$ в системе координат (η, ξ) . Это векторное поле не является глобально времениподобным в полном пространстве Минковского, поскольку обращается в нуль на линии $x = |t|$, $\xi = -\infty$.

Нормированные базисные функции для этой системы имеют вид, который в силу конформной инвариантности теории, совпадает с тем, который соответствует покоящемуся барьеру. Они имеют вид

$$u(\eta, \xi | \epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\pi \epsilon}} \sin(\epsilon \xi) e^{-i \epsilon \eta}, \quad 0 < \epsilon < \infty. \quad (46)$$

Если заставить барьер двигаться с бесконечным ускорением по направлению к границе многообразия ($\xi = -\infty$), соответствующие функции становятся бегущими волнами:

$$u(\eta, \xi | p) = \frac{1}{2 \sqrt{\pi \epsilon}} e^{i(p \xi - \epsilon \eta)}, \quad -\infty < p < +\infty, \quad \epsilon = |p|. \quad (47)$$

Это происходит потому, что барьер на границе многообразия, двигаясь со скоростью света, никогда не сможет отразить обратно в многообразии падающую на него волну. Как подчеркнул Риндлер [42], это свойство линии $x = |t|$ аналогично тому, которым обладает горизонт событий в теории черных дыр, и я буду использовать именно эти бегущие волны при обсуждении черных дыр.

Фуллинг [24] обобщил базисные функции (47) на случай массивных частиц и вычислил коэффициенты преобразования Боголюбова между этими функциями и стандартным базисом Минковского из пло-

ских волн. Немного сложнее анализ в случае, когда барьер имеет бесконечное ускорение, однако во всех случаях коэффициенты β не равны нулю. Эти коэффициенты (или вернее их аналоги, когда базис Минковского заменяется базисом, соответствующим равномерно движущемуся барьеру) становятся существенными при следующих условиях: предположим, что ускорение барьера внезапно обращается в нуль. Тогда коэффициенты β дают непосредственно число рожденных частиц. Аналогичная, но более простая ситуация заключается в следующем. Пусть при конечной температуре газ, который находится над барьером, движущимся с постоянным ускорением вверх, приходит в равновесие. Если ускорение резко прекратить, то сразу же в газе возникнет большое количество фононов.

3.3. Напряжение вакуума

Можно задать вопрос: как на самом деле выглядит тензор напряжения вакуума над плоскостью, движущейся ускоренно? В двумерном случае вопрос можно перефразировать следующим образом: какой результат дает суммирование в (12), когда мы используем функции (46)? В случае покоящейся плоскости тензор, соответствующий вакууму, так же, как и в четырехмерном случае, совпадает с тензором для невозмущенного пространства Минковского. Из-за конформной инвариантности двумерной теории ожидается, что то же должно быть справедливо и для барьера, движущегося с ускорением, и это действительно так. Однако здесь мы сталкиваемся с новой проблемой. Если включить в выражение для суммы (12) осциллирующий множитель вида $\exp(i\epsilon/\Lambda)$, мы получим для тензорной плотности $\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}}$ выражение

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = e^{-2\xi} \frac{\Lambda^2}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (48)$$

Это же выражение сохраняется и в локальной лоренцевой системе координат, ось времени которой параллельна линии постоянного ξ . Однако это означает, что в схеме Λ -регуляризации напряжение вакуума стремится к нулю при $\xi \rightarrow \infty$; ничего подобного не происходит в случае, когда ускорение отсутствует. Причина этого явления заключается в том, что в выражении (46) ϵ имеет смысл локальной энергии частицы только при $\xi = 0$. Для любого другого ξ локальная

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

энергия имеет вид $e^{-\xi}$ в силу соотношения $d\eta = e^{-\xi} d\tau$ между η и собственным временем τ для постоянного ξ . Следовательно, параметр обрезания Λ играет роль не локальной энергии, а доплеровского сдвига. Если мы согласимся считать Λ зависящей от точки, причем таким образом, чтобы локальная энергия обрезания была всегда постоянной, то вместо выражения (48) получим

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle_{\text{vac}} = \frac{\Lambda^2}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (49)$$

и в этом выражении нетрудно узнать хорошо знакомую энергию нулевых колебаний. На самом деле практически неважно, какую схему использовать, поскольку мы отдаем себе полный отчет в чем состоит явление. Некоторые, возможно, предпочтут выражение (48), поскольку оно удовлетворяет условию непрерывности (28), принимающему в настоящем контексте следующий вид:

$$\partial T^{\xi\xi}/\partial\xi + T^{\xi\xi} + T^{\eta\eta} = 0. \quad (50)$$

Пока я не могу предложить удовлетворительный расчет того, как выглядит тензор напряжения вакуума над ускоренно движущимся барьером в случае четырехмерного пространства. Этот случай не является конформно-эквивалентным случаю неподвижного барьера¹⁾, и, следовательно, априори нет никаких соображений для того, чтобы исключать из обычного расходящегося выражения (31) конечное, а значит, имеющее физический смысл слагаемое. Технические же трудности заключаются в том, что базисные функции становятся функциями Бесселя такого вида, который уже встречался у Фуллинга [24] в двумерном случае с ненулевой массой, и в том, что имеет место квантование в направлении ξ . Причиной последнего является тот факт, что любой фотон, за исключением тех, которые нацелены вертикально "вверх", в конце концов упадет обратно на барьер, и, следовательно, каждая орбита имеет точку возврата с максимумом по ξ .

Дополнительное замечание. После того как эта работа была написана, мое внимание привлекла интересная статья Мура [35] по

¹⁾ Конформная эквивалентность имеет место для поля вокруг уединенного точечного источника, движущегося равномерно ускоренно, но не для поля над движущимся ускоренно, как целое, барьером.

квантовой теории электромагнитного поля в одномерном резонаторе с переменной длиной. Мур исследовал проблему *двух* движущихся барьеров и дал: а) аккуратное описание математической структуры соответствующей квантовой теории поля и б) метод нахождения широкого класса движений барьера, которые допускают точные решения задачи, причем некоторые из них представляют значительный физический и общий интерес.

4. КЕРРОВСКАЯ ЧЕРНАЯ ДЫРА

4.1. Геометрическое введение. Эргосфера и горизонт

Теперь давайте обратимся к многообразиям с кривизной. Мы начнем с чрезвычайно экзотического случая керровской черной дыры, — поскольку он хорошо иллюстрирует большой ряд новых проблем. Интервал в этом случае имеет вид

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} [(r^2 + a^2) d\phi - a dt]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (51)$$

$$\rho \equiv \sqrt{r^2 + a^2 \cos^2 \theta}, \quad \Delta \equiv r^2 - 2Mr + a^2, \quad (52)$$

и я должен буду потратить немного времени, чтобы сделать замечание о некоторых его свойствах¹⁾. Рассматривая его при $r \rightarrow \infty$, находим, что этот интервал соответствует источнику с массой M и угловым моментом $J = Ma$. Когда константа a полагается равной нулю, он сводится к интервалу метрики Шварцшильда. Считают, что это единственная метрика, которая появляется после того, как заканчивается гравитационное излучение, когда гравитирующая материя начинает катастрофически коллапсировать под горизонт событий. Считают также, что параметр a никогда не превышает M .

Чтобы определить горизонт событий, вначале полезно заметить, что метрика не зависит от координат t и ϕ . Следовательно, имеются два независимых векторных поля Киллинга $(\xi^\mu_t) = (1, 0, 0, 0)$ и

¹⁾ Что касается дальнейших деталей о черных дырах, то читателю можно посоветовать некоторую общую ссылку, например, Black Holes, eds. DeWitt and DeWitt, Gordon and Breach, New York, London, Paris, 1973.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$(\xi^\mu_\phi) = (0, 0, 0, 1)$. (Здесь мы предполагаем, что координаты занумерованы в следующем порядке t, r, θ, ϕ .) Прямые вычисления показывают, что они удовлетворяют соотношениям

$$\xi_t^2 = -(1 - 2Mr/\rho^2), \quad (53)$$

$$(\xi_t \cdot \xi_\phi)^2 - \xi_t^2 \xi_\phi^2 = \Delta \sin^2 \theta. \quad (54)$$

Очевидно, что вектор ξ_t на большей части многообразия является времениподобным вектором Киллинга, а параметр t при $r \rightarrow \infty$ совпадает с обычной временной координатой. Однако ξ_t не является глобальным времениподобным вектором. Он обращается в нуль на поверхности так называемой *эргосферы*, которая определяется соотношением $r = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$, и пространственноподобен в области между этой поверхностью и другой поверхностью, которая задается соотношением $r = M - \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}$. Ни одна из этих поверхностей не является горизонтом. Например, внутри наружной поверхности по-прежнему существуют времениподобные векторы, которые направлены в сторону возрастающих r . При определении границы, на которой эти векторы перестают существовать, достаточно определить, где перестают существовать времениподобные векторы, имеющие только t - и ϕ -компоненты. (Некоторая малая положительная r -компонента может быть всегда добавлена к такому вектору, не нарушая его времениподобного характера.) Итак, мы рассматриваем комбинации ξ_t и ξ_ϕ вида $\xi_t + \Omega \xi_\phi$, где Ω — функция r и, возможно также, переменной θ . Для того чтобы образованный таким образом вектор был времениподобным, Ω должна лежать в области $\Omega_- < \Omega < \Omega_+$, где

$$\Omega_{\pm} = \xi_\phi^{-2} (-\xi_t \cdot \xi_\phi \pm \sqrt{(\xi_t \cdot \xi_\phi)^2 - \xi_t^2 \xi_\phi^2}). \quad (55)$$

Величина Ω — это угловая скорость, которую должен был бы иметь космический корабль (если смотреть на него из бесконечности), если бы его мировая линия была параллельна вектору $\xi_t + \Omega \xi_\phi$. Нижняя граница Ω_- обращается в нуль на поверхности эргосферы, где $\xi_t^2 = 0$. Внутри этой поверхности космический корабль не может находиться "в покое", т.е. он не может оставаться в точке с фиксированными r, θ и ϕ ; эффект увлечения Ленсе — Тирринга заставляет его вращаться вокруг черной дыры. Заметим сейчас, что если Ω выбрана не зависящей от r и θ , то $\xi_t + \Omega \xi_\phi$ является вектором

Киллинга. Это означает, что для экипажа космического корабля геометрия оказывается по-прежнему стационарной.

Если космический корабль достигает поверхности, где Ω_+ и Ω_- совпадают, его конус обзора (т.е. световой конус) сужается до нуля по крайней мере с точки зрения координатной системы t, r, θ, φ , которая становится сингулярной на этой поверхности. С этого момента корабль не может повернуть обратно, а может двигаться только в направлении областей, соответствующих убывающему параметру r , где геометрия является неизбежно динамической (нет времениподобного вектора Киллинга). Эта поверхность и есть горизонт. Его положение определяется из условия исчезновения радикала в соотношении (55), что в силу уравнения (54) эквивалентно обращению в нуль Δ . Функция Δ имеет два корня, r_{\pm} , которые определяются соотношением

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (56)$$

Именно больший из них является подходящим в этом случае.

Очень важная величина соответствует Ω_+ и Ω_- , когда значения Ω_+ и Ω_- совпадают. Она известна как угловая скорость самого горизонта, и после небольших вычислений получаем, что она равна

$$\Omega_H = \frac{a}{2Mr_+} = \frac{a}{r_+^2 + a^2}. \quad (57)$$

Другие полезные величины имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} g^{\frac{1}{2}} &= \rho^2 \sin \theta, \\ g^{\mu\nu} \frac{\partial^2}{\partial x^\mu \partial x^\nu} &= -\frac{1}{\Delta \rho^2} \left[(r^2 + a^2) \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \times \\ &\times \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + a \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial t} \right)^2 + \frac{\Delta}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \\ &+ \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \end{aligned} \quad (58)$$

Оператор \tilde{f}^μ для скалярного волнового уравнения принимает вид

$$g^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu} \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^\nu} - \frac{\tilde{\partial}}{\partial x^\nu} g^{\frac{1}{2}} g^{\mu\nu}, \quad (60)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

который на гиперповерхности $t = \text{const}$ в пространстве Керра превращается в выражение

$$\frac{\sin \theta}{\Delta} \left\{ [(r^2 + a^2) - \Delta a^2 \sin \theta] \frac{\vec{\partial}}{\partial t} + 2 M r a \frac{\vec{\partial}}{\partial \varphi} \right\}. \quad (61)$$

Только область вне горизонта необходимо рассматривать при построении и нормировке наших базисных функций, следовательно, область интегрирования по этой гиперповерхности имеет вид $r_+ < r < \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$. Поскольку скаляр кривизны для геометрии Керра равен нулю (попробуйте-ка проверить это прямым вычислением!), то нет никакой разницы между конформным и обыкновенным скалярными волновыми уравнениями. Мы также не обнаружим практической разницы между соответствующими двумя тензорами напряжений в асимптотической области $r \rightarrow \infty$, которая является единственной областью, где мы можем попытаться их вычислить.

4.2. Абсолютные единицы

Прежде чем двигаться дальше, заметим, что сейчас мы работаем в единицах, в которых $G = c = 1$, причем G — это гравитационная постоянная. Когда мы сейчас начнем проводить квантование, я добавлю еще условие $\hbar = 1$. Тогда мы получим безразмерные, или абсолютные единицы. Полезно напомнить, что абсолютные единицы длины, времени и массы равны соответственно $1,6 \cdot 10^{-33}$ см, $5 \cdot 10^{-45}$ с и $2 \cdot 10^{-5}$ г. В этих единицах масса протона равна $8 \cdot 10^{-20}$, масса Солнца 10^{38} , а размер, возраст и масса вселенной равны 10^{62} .

4.3. Базисные функции

Замечательным фактом является то, что волновое уравнение

$$g^{-1/2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} g^{1/2} g^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \Phi = 0 \quad (62)$$

в метрике Керра имеет разделяющиеся переменные. Базисные функции поэтому можно выбрать в следующем виде:

$$u(l, m, p | x) = N(p)(r^2 + a^2)^{-1/2} R_{lm}(p, a | r) \times \\ \times S_{lm}(a\epsilon | \cos \theta) e^{im\varphi} e^{-i\epsilon t}, \quad (63)$$

где N — нормировочная константа, а p — некоторая функция ϵ (обе вскоре будут определены). Функция S_{lm} — это сфероидальные гармоники, удовлетворяющие уравнению на собственные значения

$$\left[\frac{d}{d\xi} (1 - \xi^2) \frac{d}{d\xi} - \frac{m^2}{1 - \xi^2} + 2ma\epsilon - (a\epsilon)^2 (1 - \xi^2) + \lambda_{lm}(a\epsilon) \right] \times \\ \times S_{lm}(a\epsilon | \xi) = 0, \quad (64)$$

причем собственные значения $\lambda_{lm}(a\epsilon)$ удручающе сложным образом зависят от целых чисел $l (= 0, 1, 2, \dots)$, $m (= -l, -l + 1, \dots, l - 1, l)$ и аргумента $a\epsilon$, но имеют хорошо известное граничное значение $\lambda_{lm}(0) = l(l + 1)$. Прежде чем написать дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет "радиальная" часть функции, удобно ввести вначале новые координаты

$$r^* = r + \frac{M}{\sqrt{M^2 - a^2}} \left(r_+ \ln \frac{r - r_+}{r_+} - r_- \ln \frac{r - r_-}{r_-} \right), \quad (65)$$

удовлетворяющие условию

$$\frac{dr^*}{dr} = (r^2 + a^2)/\Delta. \quad (66)$$

Эти новые координаты пробегают всю вещественную ось, причем горизонт соответствует минус бесконечности. В этих координатах "радиальное" уравнение принимает следующий простой вид:

$$\left[\frac{d^2}{dr^{*2}} - V_{lm}(\epsilon, a | r) \right] R_{lm}(p, a | r) = 0, \quad (67)$$

где

$$V_{lm}(\epsilon, a | r) = - \left(\epsilon - m \frac{a}{r^2 + a^2} \right)^2 + \lambda_{lm}(a\epsilon) \frac{\Delta}{(r^2 + a^2)^2} + \\ + \frac{2(Mr - a^2) \Delta}{(r^2 + a^2)^3} + \frac{3a^2 \Delta^2}{(r^2 + a^2)^4}. \quad (68)$$

Нам будет необходимо знать функцию R только в асимптотических областях $r^* \rightarrow \pm \infty$. В этих областях функция V принимает вид

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$V_{lm}(\epsilon, a | r) \rightarrow \begin{cases} -(\epsilon - m\Omega_H)^2, & r^* \rightarrow -\infty, \\ -\epsilon^2, & r^* \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (69)$$

В области между этими пределами V действует как потенциальный барьер, приводящий к обратному рассеянию. Из-за присутствия горизонта "радиальные" волны могут брать начало и распространяться из одной из асимптотических областей, а затем снова рассеиваться в нее. Следовательно, мы будем различать два класса решений уравнения (67), которые в силу (68) имеют асимптотические формы:

$$\vec{R}_{lm}(p, a | r) \rightarrow \begin{cases} \exp(ipr^*) + \vec{A}_{lm}(p, a) \exp(-ipr^*), & r^* \rightarrow -\infty \\ \vec{B}_{lm}(p, a) \exp\{i(p + m\Omega_H)r^*\}, & r^* \rightarrow \infty \end{cases}, \quad p > 0, \quad \epsilon = p + m\Omega_H, \quad (70)$$

$$\vec{R}_{lm}(p, a | r) \rightarrow \begin{cases} \vec{B}_{lm}(p, a) \exp\{i(p - m\Omega_H)r^*\}, & r^* \rightarrow -\infty \\ \exp\{-ipr^*\} + \vec{A}_{lm}(p, a) \exp(ipr^*), & r^* \rightarrow \infty \end{cases}, \quad p > 0, \quad \epsilon = p. \quad (71)$$

С этого момента и далее я буду ставить над соответствующими базисными функциями стрелки. Как хорошо известно, нормировка базисных функций определяется в основном поведением в асимптотических областях, из которых приходят волны. Можно построить очень широкие волновые пакеты, которые в начальные моменты времени находятся в этих областях. Подставляя такие волновые пакеты в интеграл (6), используя выражение (61) и соотношение (66) и переходя к пределу бесконечно широких пакетов, получаем, что базисные функции (63) удовлетворяют соотношениям ортогональности:

$$\begin{aligned} \langle \vec{u}(l, m, p), \vec{u}(l', m', p') \rangle &= \langle \vec{u}(l, m, p), \vec{u}(l', m', p') \rangle = \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'} \delta(p - p'), \end{aligned} \quad (72)$$

и соответствующим им комплексно-сопряженным соотношениям (все остальные внутренние произведения равны нулю) при условии, что сфероидальные гармоники нормированы следующим образом:

$$\int S_{lm}(a\epsilon | \xi) S_{l'm'}(a\epsilon | \xi) d\xi = \delta_{ll'}, \quad (73)$$

а нормировочная константа выбрана равной

$$N(p) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}}. \quad (74)$$

4.4. Горизонты прошлого и будущего и вакуумное состояние

Сделаем теперь несколько замечаний о роли горизонта: ранее я сделал утверждение о том, что космический корабль, попавший под горизонт, не может вернуться обратно так, как если бы горизонт был односторонней мембраной. Это только половина замечания. Из-за инвариантности интервала (51) по отношению к одновременному обращению t и ϕ должен существовать другой горизонт, из которого материя (или излучение) могут только уходить и не могут вернуться. Эта поверхность известна как горизонт *прошлого*. А другой, о котором шла речь выше, есть горизонт *будущего*. Выражение (70) представляет волну, которая возникает на горизонте прошлого. Часть ее рассеивается на горизонт будущего, а другая часть уходит на бесконечность. Выражение (71) представляет волну, которая приходит из бесконечности. Часть ее опять рассеивается на бесконечность, а другая часть проникает под горизонт будущего.

В качестве "вакуумного" состояния для керровской черной дыры я собираюсь выбрать вакуум, определенный обычным способом по отношению к базисным функциям (63) при условии, что (70) и (71) дают выражения для радиальных функций. В этом "вакууме" нет частиц, пришедших из бесконечности или имеющих своим источником горизонт прошлого. То, что не должно быть частиц, пришедших из бесконечности, выглядит достаточно правдоподобно, поскольку пространство-время на бесконечности — это обычное, хорошо известное пространство-время, и это именно то, что нам следовало ожидать в случае нормального вакуума. То что не должно быть частиц, идущих от горизонта прошлого, есть в лучшем случае не очень обоснованное предположение или по крайней мере некоторая гипотеза для реальных черных дыр, поскольку мы считаем, что все реальные черные дыры (если они существуют) образовались в результате процесса коллапса и для таких черных дыр *горизонт прошлого отсутствует*. На самом деле в следующем разделе мы увидим, что если принять во внимание процесс коллапса, то это приведет к совершенно другим граничным услови-

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

ям и важной модификации наших результатов. Однако сейчас я оставляю базисные функции и "вакуум" таковыми, как они есть. Тогда формализм по крайней мере обладает тем свойством, что выглядит так, как в стандартной задаче рассеяния, а следовательно, хорошо известен.

4.5. Сверхизлучение

Теперь я хочу обратить внимание на один небольшой, но существенный момент. Посмотрите на выражение (70). Если азимутальное квантовое число m удовлетворяет неравенству $m\Omega_H < -p$, то величина ϵ отрицательна, и мы сталкиваемся с существованием волн, которые имеют отрицательную энергию! Не разрушает ли это наши основные принципы? Ответ такой: *нет*, не разрушает. Наши "принципы" были основаны на предположении о существовании глобального времениподобного векторного поля Киллинга. В настоящем случае у нас такого поля нет; поле ξ_t пространственноподобно в эргосфере. Волновая функция (70) является на самом деле именно такой функцией. Для наблюдателя, который в окрестности горизонта движется вдоль времениподобной мировой линии, она является волной с положительной энергией и угловой частотой p . Следует отметить еще и два других факта: а) как это и должно быть, групповая скорость для начальной и проходящей волн направлена по радиусу наружу, а для отраженной волны — внутрь; б) попытка заменить базисные функции \tilde{u} на комплексно сопряженные привела бы к нарушению соотношений ортогональности (72).

Это явление должно, однако, вызывать некоторую настороженность. Математическая ситуация аналогична той, которая имеет место для двумерного осциллятора с пружиной, которая имеет *отрицательную* упругую постоянную, несет заряд и помещена в однородное магнитное поле. Если магнитное поле достаточно сильное, все орбиты будут стабильными. Однако один из двух операторов уничтожения для этой системы связан с модой, имеющей отрицательную частоту, и *состояние с наиминишей энергией отсутствует*.

То, что для скалярного поля в метрике Керра также нет состояния с наиминишей энергией, выясняется из следующего анализа явления, который принадлежит Мизнеру [34] и Зельдовичу [50, 51].

Используя постоянство вронскиана

$$R_1 \frac{dR_2}{dr^*} - \frac{dR_1}{dr^*} R_2, \quad (75)$$

для различных комбинаций радиальных волновых функций (70), (71) и соответствующих комплексно сопряженных функций находим, что амплитуды прошедшей и отраженной волн удовлетворяют следующим соотношениям:

$$1 - |\hat{A}_{lm}(p, a)|^2 = \frac{p + m\Omega_H}{p} |\hat{B}_{lm}(p, a)|^2, \quad (76)$$

$$1 - |\hat{A}_{lm}(p, a)|^2 = \frac{p - m\Omega_H}{p} |\hat{B}_{lm}(p, a)|^2, \quad (77)$$

$$p \hat{A}_{lm}^*(p, a) \cdot \hat{B}_{lm}(p + m\Omega_H, a) = -(p + m\Omega_H) \hat{B}_{lm}^*(p, a) \hat{A}_{lm}(p + m\Omega_H, a), \quad (78)$$

$$(p + m\Omega_H) \hat{B}_{lm}(p, a) = p \hat{B}_{lm}(p + m\Omega_H, a), \quad (79)$$

из которых мы получаем также

$$|\hat{A}_{lm}(p, a)| = |\hat{A}_{lm}(p + m\Omega_H, a)|. \quad (80)$$

Два первых являются важными соотношениями. Если $m\Omega_H < -p$, тогда волна, возникшая на горизонте прошлого, отражается с амплитудой, которая больше первоначальной. То же справедливо для волны, пришедшей из бесконечности, если $m\Omega_H > p$.

Мизнер назвал это явление *сверхизлучением*. В физике это явление не новое. Оно уже было известно более старому поколению физиков, которые называли его *парадоксом Клейна*. Физически это явление соответствует процессу стимулированного излучения, которое немедленно наводит на мысль о существовании соответствующего спонтанного излучения. И в самом деле, этот последний процесс имеет место. "Вакуум" Керра не является состоянием с наинизшей энергией. Он спонтанно излучает пары, причем одна частица из каждой пары уходит на бесконечность, а другая падает в черную дыру. В результате этого постоянного процесса черная дыра должна постепенно терять свой угловой момент. На классическое явление, родственное

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

этому, впервые указал Пенроуз [41]. Он заметил, что частица, падающая в эргосферу, может распадаться на две частицы, одна из которых движется в направлении черной дыры, в то время как другая покидает эргосферу с энергией, большей, чем та, которой обладала родившая ее исходная частица. Таким путем можно отнимать энергию от черной дыры за счет ее углового момента (и, конечно, ее массы). Именно этот процесс впервые привел к появлению слова *эргосфера*.

4.6. Поток частиц от керровской черной дыры

Первую попытку вычислить величину потока частиц от керровской черной дыры, используя амплитуды вероятности прохождения и отражения в сочетании с идеей стимулированного излучения, сделал Старобинский [45] (см. также [46]). Первое же полное последовательное вычисление, основанное на вторичном квантовании, проделал Вильям Унру [47].

В частности, именно потому, что Унру существенным образом использовал тензор напряжений, мы предполагаем рассмотреть здесь его результаты.

Нам понадобятся (r, t) - и (r, φ) -компоненты тензора напряжений на бесконечности, поскольку на бесконечности они дают поток энергии и поток углового момента. Я буду брать тензор $T^{\mu\nu}$ в его плотностной форме. Для конформно-инвариантной теории мы получаем

$$\langle T_{rt} \rangle_{\text{vac}} = \rho^2 \sin \theta \left[\frac{1}{3} \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_+ \right\rangle_{\text{vac}} - \frac{1}{6} \left\langle \left[\varphi, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \right]_+ \right\rangle_{\text{vac}} \right] +$$

+ Члены, которые на бесконечности равны нулю. (81)

На бесконечности первый и второй члены в квадратных скобках дают с точностью до числовых множителей одинаковые вклады. Следовательно, мы получаем выражение

$$\langle T_{rt} \rangle_{\text{vac}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_+ \right\rangle_{\text{vac}}, \quad (82)$$

которое в точности совпадает с тем, что дает обычный (конформно-инвариантный) тензор. Аналогично

$$\langle T_{r\varphi} \rangle_{\text{vac}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2} r^2 \sin \theta \left\langle \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right]_+ \right\rangle_{\text{vac}}. \quad (83)$$

Каждое из этих выражений немедленно превращается в сумму по модам, как это делается в соотношении (12). Например, подставляя базисные функции (63), (70), (71) в (82), получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{tr} \rangle_{\text{vac}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & \frac{\sin \theta}{8\pi^2} \sum_{l, m} \int_0^\infty \{ -(p + m\Omega_H)^2 |\vec{B}_{lm}(p, a)|^2 [S_{lm}(\vec{a}\hat{\epsilon} | \cos \theta)]^2 + \\ & + p^2 (1 - |\vec{A}_{lm}(p, a)|^2) [S_{lm}(a\hat{\epsilon} | \cos \theta)]^2 \} \frac{dp}{p}. \end{aligned} \quad (84)$$

В этом месте мы должны регуляризовать тензор с помощью осциллирующего множителя. Оказывается, однако, что нам это не понадобится, если мы заметим, что в силу соотношений (77) и (79) в каждой моде имеет место сокращение между первым и вторым членами в фигурных скобках. Сокращение имеет место для всех мод, за исключением тех, для которых $p < -m\Omega_H$ в первом члене, и тех, для которых $p < m\Omega_H$ во втором члене¹⁾. Это как раз и есть сверхизлучающие моды. С помощью соотношения (80) можно скомбинировать моды \rightarrow и \leftarrow , в результате чего получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{tr} \rangle_{\text{vac}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} & - \frac{\sin \theta}{4\pi^2} \sum_{l, m} \int_0^{m\Omega_H} p (|\vec{A}_{lm}(p, a)|^2 - 1) \times \\ & \times [S_{lm}(a\hat{\epsilon} | \cos \theta)]^2 dp. \end{aligned} \quad (85)$$

¹⁾ Чтобы заметить это, достаточно во втором члене сделать сдвиг $p \rightarrow p + m\Omega_H$.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} \langle T_{r\varphi} \rangle_{\text{vac}} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\sin \theta}{4\pi^2} \sum_{\substack{l, m \\ m\Omega_H > 0}} m \int_0^{m\Omega_H} (|\vec{A}_{lm}(p, a)|^2 - 1) \times \\ \times [S_{lm}(a \mp |\cos \theta|)^2] dp. \end{aligned} \quad (86)$$

Если мы теперь приравняем полные потоки на бесконечности к скоростям, с которыми черная дыра теряет соответственно массу и угловой момент, то, используя соотношение (73), получаем

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \langle T_{rt} \rangle_{\text{vac}} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l, m \\ m\Omega_H > 0}} \int_0^{m\Omega_H} p (|\vec{A}_{lm}(p, a)|^2 - 1) dp, \quad (87)$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \langle T_{r\varphi} \rangle_{\text{vac}} = -\frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{l, m \\ m\Omega_H > 0}} m \int_0^{m\Omega_H} (|\vec{A}_{lm}(p, a)|^2 - 1) dp. \quad (88)$$

Это именно те выражения, которые должны быть использованы в расчетах, интерпретирующих усиление классической волны как процесс стимулированного излучения и связывающих его с идеей спонтанного излучения.

4.7. Скорость затухания. Критическая масса

Чтобы получить из этих выражений конкретные числа, необходимо оценить коэффициенты \vec{A} . Вычисления на компьютере показывают, что явление сверхизлучения не очень эффективно (за исключением гравитационных волн [45, 46]). Причина состоит в том, что когда $p < |m\Omega_H|$, функция V в выражении (68) представляет собой потенциальный барьер, имеющий высоту, которая растет приблизительно как l^2 . Используя приближение ВКБ для оценки фактора, характеризующего проникновение частиц через барьер, получаем

$$|\vec{A}|^2 - 1 \sim \exp\left(-\int_{r_1^*}^{r_2^*} \sqrt{V} dr^*\right) \sim e^{-\zeta l}, \quad (89)$$

где r_1^* и r_2^* — точки поворота, ζ — число, которое грубо имеет порядок, равный единице. Видно, что в выражениях (87) и (88) доминирует мода, соответствующая $l = 1$, $|m| = 1$, и, следовательно,

$$\frac{dM}{dt} \sim - \frac{e^{-\zeta}}{4\pi} \Omega_H^2, \quad \frac{dJ}{dt} \sim - \frac{e^{-\zeta}}{2\pi} \Omega_H. \quad (90)$$

Сейчас полезно ввести так называемую *неприводимую массу*. Она определяется как

$$M_{ir}^2 = \frac{1}{2} M r_+ \quad (91)$$

и имеет величину, заключенную между $M/\sqrt{2}$ и M . С помощью соотношений (56) и (57) легко показать, что она удовлетворяет соотношениям (напомним, что $J = Ma$)

$$M_{ir}^2 + \frac{J^2}{4M_{ir}^2} = M^2, \quad M_{ir}^2 - \frac{J^2}{4M_{ir}^2} = M \sqrt{M^2 - a^2}, \quad (92)$$

$$\Omega_H = \frac{a}{4M_{ir}^2} = \frac{J}{4MM_{ir}^2}. \quad (93)$$

Подставляя выражение (93) в соотношения (90), получаем

$$\frac{dJ}{dt} \sim - \frac{e^{-\zeta}}{8\pi MM_{ir}^2} J \sim - \frac{e^{-\zeta}}{8\pi M^3} J; \quad (94)$$

это говорит о том, что время жизни по отношению к потере углового момента за счет спонтанного излучения оценивается как

$$\tau \sim 8\pi e^{\zeta} M^3. \quad (95)$$

Возраст вселенной равен 10^{62} . Значит, чтобы с момента образования черной дыры ее угловой момент в результате этого процесса значительно изменился, ее масса должна быть меньше, чем ¹⁾

¹⁾ Выражение (95) на самом деле является верхней границей на время жизни, поскольку мы учитываем кванты только одного поля. Унру [47] показал, что нейтрино рождаются с той же скоростью, а Старобинский и Чурилов [45, 46] показали, что рождаемые фотоны и гравитоны даже более многочисленны. Эти частицы уже сами по себе приводят к тому, что величина вре-

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\left(\frac{10^{62}}{8 \pi e^5} \right)^{1/3} \sim 10^{20} = 2 \cdot 10^{15} \text{ г.} \quad (96)$$

Это типичная масса астероида. Она должна быть спрессована и иметь радиус меньше, чем $3 \cdot 10^{-13}$ см.

4.8. Согласие с теоремой Хокинга

Понятие неприводимая масса важно не только потому, что оно облегчает приведенные выше вычисления. Его роль можно понять еще из следующего дифференциального равенства:

$$dM_{\text{ir}} = \frac{M_{\text{ir}}}{\sqrt{M^2 - a^2}} (dM - \Omega_H dJ), \quad (97)$$

которое можно получить из соотношений (92). Посылая на черную дыру пробные частицы по всем возможным орбитам, достигающим горизонта, и исследуя увеличение dM и dJ , сообщаемое таким образом дыре, Диметриус Кристодулу [14] (см. также [15]) показал, что величина dM_{ir} никогда не может быть отрицательна. Одновременно Стивен Хокинг [30] показал в достаточно общем виде, что площадь поверхности черной дыры (т.е. горизонта будущего) никогда не может уменьшаться. Площадь A черной дыры Керра [которая вычисляется непосредственно из выражения для интервала (51)!] равна $16\pi M_{\text{ir}}^2$. Следовательно, результат Кристодулу является частным случаем теоремы Хокинга и может быть переписан в виде

$$dA = \frac{2A}{\sqrt{M^2 - a^2}} (dM - \Omega_H dJ) \geq 0. \quad (98)$$

мени жизни уменьшается почти на два порядка. Более того, будут также рождаться и массивные частицы, если их массы меньше $|\Omega_H|$. Для экстремальной черной дыры Керра ($a = M$) с массой 10^{20} скорость вращения $|\Omega_H|$ равна $1/4 M = 2,5 \cdot 10^{-25} = 30$ МэВ; следовательно, в этом случае единственными массивными частицами, которые рождаются, будут электроны и позитроны. Однако для черных дыр, масса которых по величине на два или три порядка меньше, число частиц, подлежащих спонтанному излучению, может возрасти до бесконечности, приводя к взрывному характеру потери энергии и углового момента.

Рассмотрим теперь одну из частиц, излученную на бесконечность в результате процесса спонтанного излучения. Она покидает черную дыру с энергией, величина которой равна p , а азимутальный угловой момент равен m . Следовательно, ее излучение приводит к следующему изменению площади поверхности черной дыры:

$$dA = - \frac{2A}{\sqrt{M^2 - a^2}} (p - m\Omega_H). \quad (99)$$

Однако только те частицы излучаются на бесконечность, которые принадлежат сверхизлучающим модам \leftarrow , а для них величина $p - m\Omega_H$ всегда отрицательна. Таким образом, процесс спонтанного излучения находится в полном соответствии с теоремой Хокинга.

5. ВЗРЫВАЮЩИЕСЯ ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

5.1. Базисные функции для поздних моментов времени

Сейчас я хочу обсудить некоторые вызвавшие широкий резонанс последние работы Хокинга [31, 32], который прямо обратил внимание на следствия, вытекающие из выбора граничных условий на горизонте прошлого; для этого он рассматривал, что происходит в случае реалистической черной дыры, образовавшейся в результате коллапса, когда горизонт прошлого отсутствует. Для простоты я приведу детали только для случая невращающихся черных дыр, для которых $a = 0$, $J = 0$, $\Omega_H = 0$, $r_+ = 2M$ и выражение (51) сводится к метрике Шварцшильда. Чтобы сократить последовательность изложения, которой мы следовали выше, давайте вначале отметим, как в этом случае выглядят базисные функции (63), (70) и (71). Легко видеть, что они сводятся к выражениям¹⁾

$$u(l, m, p | x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2pr}} R_l(p | r) Y_{lm}(\cos \theta) e^{im\phi} e^{-i\epsilon t}, \quad (100)$$

¹⁾ функция, обозначенная здесь через Y_{lm} , есть просто $\lim_{a \rightarrow \infty} S_{lm}$. Она удовлетворяет условию нормировки (73) и, следовательно, отличается на постоянный множитель от функции, которая обычно обозначается этим символом. Она также не содержит множитель $\exp(im\phi)$.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\bar{R}_l(p|r) \rightarrow \begin{cases} e^{ipr^*} + \bar{A}_l(p)e^{-ipr^*}, & r^* \rightarrow -\infty, \\ B_l(p)e^{ipr^*}, & r^* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (101)$$

$$\bar{R}_l(p|r) \rightarrow \begin{cases} B_l(p)e^{-ipr^*}, & r^* \rightarrow -\infty, \\ e^{-ipr^*} + \bar{A}_l(p)e^{ipr^*}, & r^* \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (102)$$

где во всех случаях $\epsilon = p$, а координата r^* и функция V имеют вид

$$r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \quad (103)$$

$$V_l(\epsilon|r) = -\epsilon^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right]. \quad (104)$$

Теперь сверхизлучающие моды отсутствуют (нет эргосферы), и равенства (76) – (80) сводятся к выражениям

$$\bar{B}_l(p) = \bar{B}_l(p) \equiv B_l(p), \quad (105)$$

$$|\bar{A}_l(p)| = |\bar{A}_l(p)|, \quad (106)$$

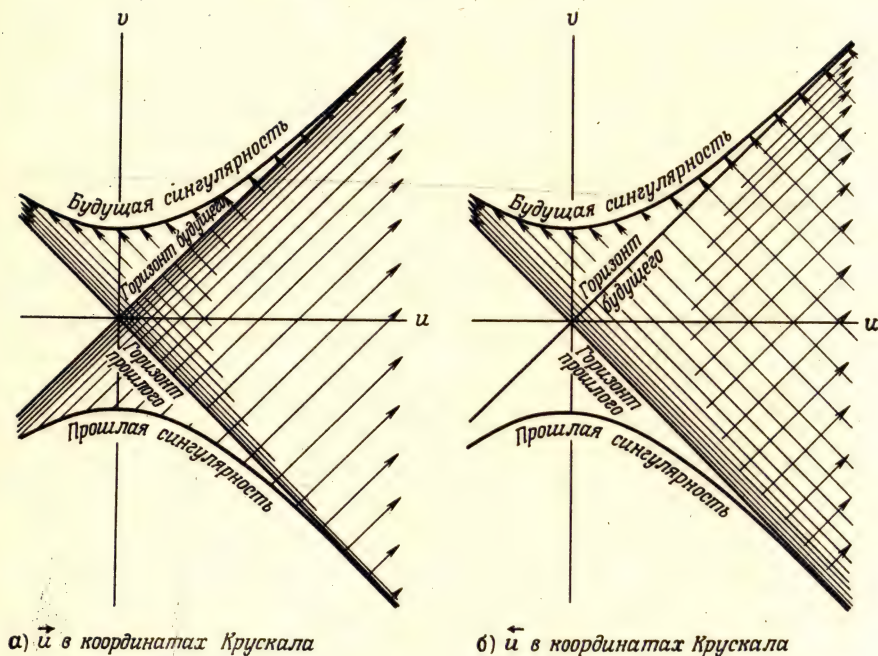
$$1 - |\bar{A}_l(p)|^2 = 1 - |\bar{A}_l(p)|^2 = |B_l(p)|^2, \quad (107)$$

$$\bar{A}_l^*(p) B_l(p) = -B_l^*(p) \bar{A}_l(p). \quad (108)$$

Хотя приведенные выше базисные функции не являются больше правильными для ранних моментов времени (поскольку нет горизонта прошлого), они тем не менее будут полезны для нас при $t \rightarrow \infty$, т.е. после того, как коллапс закончился и образовалась застывшая черная дыра. На фиг. 2 показано, на что обычно похоже пространственно-временное поведение радиальной части этих функций, если горизонт прошлого *был*. На фигуре использованы координаты u и v , в которых радиальные световые направления имеют угол 45° с осями и которые вблизи горизонтов связаны с обычными координатами Шварцшильда с помощью преобразования Крускала:

$$u = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{ch}(t/4M),$$

$$v = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right)^{1/2} e^{r/4M} \operatorname{sh}(t/4M). \quad (109)$$



Ф и г. 2.

Преобразование Крускала обеспечивает "максимальное аналитическое продолжение" метрики Шварцшильда; достоинством этого продолжения является то, что оно сохраняет хорошее (несингулярное) поведение метрического тензора на горизонтах ($r = 2M$, $t = \pm\infty$). Строго говоря, соотношения (109) справедливы только в правом квадранте (вне горизонтов), а в других квадрантах они должны быть заменены соответствующими выражениями того же типа. Квадрант, ко-

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

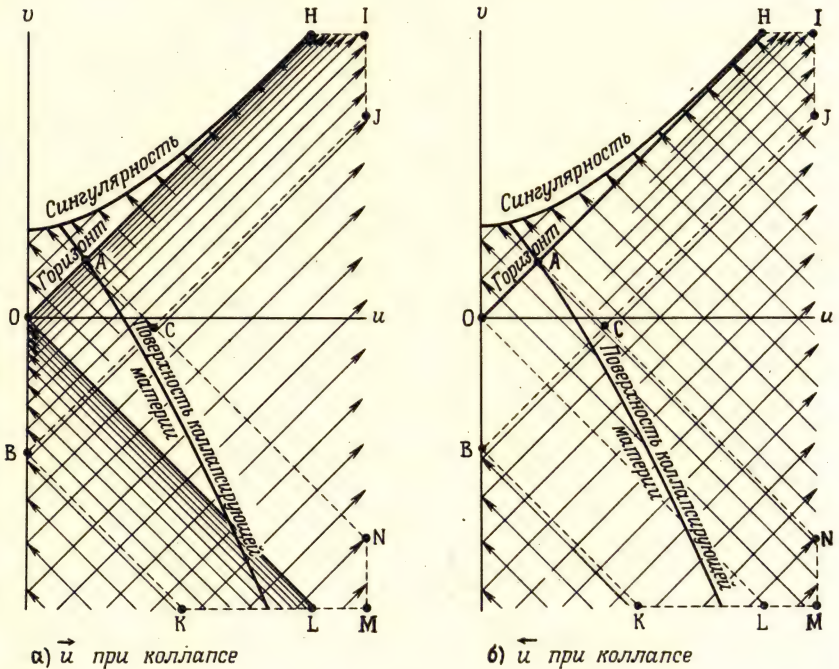
торый на каждой из фигур опущен, можно рассматривать как другую вселенную, присоединенную к нашей с помощью так называемой "кровой норы" (wormhole), однако в случае коллапса такая вселенная отсутствует и, следовательно, не имеет никакого значения для настоящего обсуждения.

Каждая точка на диаграмме соответствует двумерной сфере радиуса r , а линии с постоянным r являются гиперболами. Линии со стрелками, направленными под углом 45° , являются линиями постоянной фазы (гребни волны) для различных компонент базисных функций. Следует заметить, что на горизонтах в результате сближения этих линий их плотность возрастает до бесконечности. Это одно из выражений гравитационного красного смещения: чем ближе к горизонту находится волна, тем короче должна быть ее локальная длина волны, для того чтобы она имела (или должна была иметь) заданную наперед фиксированную (монохроматическую) частоту на бесконечности.

5.2. Глобальное поведение базисных функций для поздних моментов времени

На фиг. 3 показано действительное поведение базисных функций в случае коллапса. Здесь имеется только один горизонт, горизонт будущего, который образуется в результате катастрофического сжатия материи, имеющей сферически-симметричное распределение. Координаты, обозначенные, как и выше, через u и v , опять выбраны так, что радиальные световые направления имеют угол 45° с осями. Каждая точка снова соответствует двумерной сфере, исключением является только ось v , которая представляет мировую линию центра распределения массы. Точки, для которых $u < 0$, здесь не рассматриваются. Поскольку происходит коллапс, то в конце концов достигается световой конус, из внутренней области которого ни один сигнал не может уйти на бесконечность. Это и есть горизонт. Его вершина (событие, порождающее горизонт) находится в начале системы u, v -координат. Точка A , в которой поверхность коллапсирующей материи пересекает горизонт, обозначает момент рождения черной дыры. На каждой фигуре в области над штриховой линией ACN и вне горизонта новые координаты u, v и базисные функции \tilde{u}, \tilde{v} совпадают с теми, которые соответствуют фиг. 2. Ниже штриховой линии имеются

существенные различия. Рассмотрим прежде всего функцию \bar{u} . Над линией ACN входящие волны, соответствующие этой функции, возникают на бесконечности с единичной амплитудой. Они сохраняют эту величину амплитуды до тех пор, пока не достигнут области, где функция V_l (104) начинает принимать достаточно большие значения. На диаграмме внешнюю границу этой области можно приблизительно



Ф и г. 3.

обозначить линией $r = \text{const}$, проходящей через точку C. По мере того как падающие волны пересекают эту область, их амплитуда уменьшается до тех пор, пока не достигнет величины $|B_l|$, которую они имеют в тот момент, когда пересекают горизонт. Уходящие (рассеянные) волны рождаются в той же области. Они уходят на бесконечность, пересекая линию HIJ и имея при этом амплитуду $|\bar{A}_l|$.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Под линией ВСJ уходящие волны также уносят на бесконечность амплитуду $|\tilde{A}_I|$. Однако процесс рассеяния, который их порождает, существенно отличается от того, который происходит выше этой линии. Если проследить за этими волнами в направлении, обратном по времени, то встреча с коллапсирующей материей произойдет вне горизонта; это означает, что функция V_I имеет небольшую величину. Более того, ниже линии OL горизонт больше не поглощает нерассеянные падающие волны. В результате амплитуда падающих волн при пересечении области между линиями ACN и OL быстро уменьшается, а в области OLKB падает фактически до нуля. Ниже линии BK амплитуда опять возрастает и в конце концов для ранних моментов времени стабилизируется на величине $|\tilde{A}_I|$. Эти, соответствующие ранним моментам времени падающие волны, если проследить за их эволюцией во времени, полностью превращаются в уходящие волны отчасти за счет процесса обратного рассеяния из-за кривизны пространства, а отчасти за счет полного прохождения через центр коллапсирующей материи. Они должны, таким образом, иметь ту же самую амплитуду, что и уходящие волны.

Необходимо сделать одно замечание о возможности негравитационных взаимодействий между скалярным полем (или любым другим полем, которое может быть проквантовано) и коллапсирующей материей. Если между ними имеется умеренное или сильное взаимодействие, может возникнуть вопрос, почему мы исключаем его из рассмотрения при описании базисных функций \tilde{u} , \tilde{v} , в частности тогда, когда эти функции распространяются внутрь и через материю ниже линии ACN. Ответ заключается в том, что мы будем рассматривать проблему вакуума. В ранние моменты времени нет квантов поля. Следовательно, коллапсирующая материя вначале взаимодействует только с вакуумными флуктуациями поля, в результате возникает необходимость в вычислении поправок к физическим свойствам материи, возникающим в результате таких взаимодействий, а также в проведении всех необходимых перенормировок для наблюдаемых физических параметров материи. Если мы предположим, что эти поправки уже включены в наше описание материи, то нет необходимости рассматривать их повторно. Что касается реальных квантов, которые рождаются в процессе коллапса, то они действительно непосредственно взаимодействуют с материей, если, конечно, константа взаимо-

действия отлична от нуля. Однако сейчас я отложу обсуждение их свойств до более удобного случая.

Теперь давайте рассмотрим функцию \tilde{u} , поведение которой существенно отличается от поведения функции \tilde{t} . Наиболее важной особенностью этой функции является то, что она соответствует бесконечному числу уходящих волн в области вне горизонта. Рассмотрим уходящие волны, находящиеся в области ОНІВ. Эти волны, проходя через линию НІІ, переносят на бесконечность амплитуду $|B_l|$. Однако линию ОL они пересекают, имея единичную амплитуду. Это означает, что отвечающие им падающие волны в области ОLKB должны переносить из бесконечности (через линию KL) по крайней мере большую амплитуду. Вблизи линии ОL амплитуда этих падающих волн должна быть, конечно, в точности равна единице. Вот почему число волн вблизи линии ОL *бесконечно*, и, следовательно, волны короткой длины (высокие частоты) доминируют. Эти волны распространяются по законам геометрической оптики без ослабления их интенсивности, связанного с рассеянием.

Нетрудно определить вид функции \tilde{t} вблизи линии ОL на бесконечности. Заметим, во-первых, что

$$e^{r^*/2M} = \left(\frac{r}{2M} - 1 \right) e^{r/2M}; \quad (110)$$

после подстановки в (109) это дает

$$r^* - t = 4M \ln(u - v), \quad (111)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(l, m, p | x) &\xrightarrow[r^* \rightarrow -\infty]{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}r} Y_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi} \times [\exp\{i4Mp \ln(u-v)\} + \\ &+ \tilde{A}_l(p) \exp\{-ip(r^* + t)\}]. \end{aligned} \quad (112)$$

Вид, который функция \tilde{u} принимает в окрестности линии ОL вдали от оси v (геометрическая оптика), получается из (112) заменой первого члена, стоящего в скобках, и заменой второго члена выражением (101) при $r^* \rightarrow \infty$:

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\begin{aligned} \tilde{u}(l, m, p | x) &\xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{\text{вблизи OL}} \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}r} Y_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi} \times \\ &\times [\theta(-u-v) \exp\{i4Mp \ln(-u-v)\} + B_l(p) \exp\{ip(r^* - t)\}]. \end{aligned} \quad (113)$$

Ступенчатая функция в первом члене соответствует внезапному включению этого члена, что ясно из фиг. 3(а). Чтобы в будущем при работе с этим членом избежать трудностей, связанных с неопределенностью фазы, полезно добавить к p бесконечно малую мнимую часть, так что на линии OL этот член действительно обращается в нуль.

Для того чтобы привести выражение (113) к виду, который можно было бы использовать практически, необходимо заменить переменные u и v переменными r^* и t . (В терминах r^* и t метрика всюду вне материи принимает свой стандартный шварцшильдовский вид.) Связь между этими двумя системами координат устанавливается с помощью следующих аргументов, принадлежащих Хокингу.

Пусть k — малый контрвариантный световой вектор смещения, направленный внутрь вблизи горизонта в верхней части (u, v) -плоскости и имеющий компоненты $(-\epsilon, \epsilon)$ в (u, v) -координатах. Пусть k пересекает N волновых гребней функции \tilde{u} . Сдвинем k параллельно себе в прошлое вдоль линий постоянной фазы (которые являются световыми геодезическими) через центр коллапсирующей материи и далее опять на бесконечность. Сдвинутый таким образом вектор k будет по-прежнему световым и будет все также пересекать N волновых гребней (нового замененного члена), однако теперь он будет направлен наружу. Следовательно, теперь он должен иметь [в координатной системе (u, v)] компоненты (ϵ, ϵ) . В координатной системе (r^*, t) , для которой в окрестности бесконечности интервал имеет вид $ds^2 = dr^{*2} - dt^2$, компоненты вектора k должны, очевидно, иметь вид $(D\epsilon, D\epsilon)$, где D — некоторый множитель, который (для больших r^*) является константой вдоль линии OL. Из этого следует, что для некоторого t_0

$$-u - v \xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{} D(t_0 - r^* - t) \text{ вблизи OL.} \quad (114)$$

Это соотношение может быть непосредственно использовано в выражении (113).

5.3. Стационарная компонента и ее свойства подобия

Вдали от линии OL выражение (113) с заменой, соответствующей (114), не является более справедливым в строгом смысле. Во-первых, множитель D перестает быть в точности константой. Во-вторых, амплитуда замененного члена в (113) уменьшается. Например, ниже линии ВК амплитуда приходящей компоненты должна стремиться к $|B_l|$, чтобы сравняться с амплитудой компоненты уходящих волн ниже линии ВСJ. Все эти изменения влияют, однако, только на переходное поведение квантованного поля. Сейчас мы собираемся рассмотреть тензор напряжений для больших значений r^* выше линии ВСJ. В этой области поле, как полагают, находится в стационарном состоянии и поведение функции \vec{u} оставалось бы неизменным, если бы она была заменена функцией, вид которой для ранних времен *в точности* совпадал бы с выражением (113). Я буду называть модифицированную таким образом функцию *стационарной компонентой* и обозначать ее полужирным символом \vec{u} :

$$\vec{u}(l, m, p | x) \xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{2\pi \sqrt{2p} r} [\theta(t_0 - r^* - t) \exp \{i 4Mp [\ln(t_0 - r^* - t) + \ln D]\} + B_l(p) \exp \{ip(r^* - t)\}] Y_{lm}(\cos \theta) e^{i\Phi}. \quad (115)$$

Единственной неопределенной величиной в выражении (115) является константа D , величина которой зависит от геометрии в области, занятой материей, и, следовательно, от деталей коллапса. Оказывается, однако, что нам нет необходимости знать ее. Это потому, что D входит только под знаком логарифма и, следовательно, дает вклад в виде несущественного фазового множителя¹⁾. Появление логарифма является выражением важного свойства подобия для волновых гребней вблизи горизонта и вблизи линии OL: пространственно-временное распределение этих гребней, в частности их бесконечное скопление, *выглядит одинаково при любом увеличении масштаба*.

¹⁾ По этой самой причине наши конечные результаты, соотношения (135) и (136), будут оставаться неизменными, если начальное распределение материи было несферическим, при условии того, что ее полный спиновый угловой момент равен нулю [32].

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

5.4. Базисные функции для ранних моментов времени.

Преобразование Боголюбова

Поскольку в процессе коллапса изменяется метрика, то можно ожидать, что рождение частиц имеет место исключительно за счет изменения геометрии. Для того чтобы вычислить их скорость рождения, нам необходимо определить начальное состояние. Предположим, что геометрия и распределение материи являются статическими для ранних моментов времени, до того как начался процесс коллапса. Базисные функции, которые соответствуют этому режиму, имеют вид

$$f(l, m, p | x) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2p}r} F_l(p|r) Y_{lm}(\cos\theta) e^{im\varphi} e^{-i\epsilon t}, \quad p > 0,$$

$$F_l(p|r) \xrightarrow{r^* \rightarrow \infty} \exp(-ipr^*) - (-1)^l \exp\{i(p r^* + 2\delta_l(p))\}, \quad (116)$$

где $\epsilon = p$, а $\delta_l(p)$ хорошо известный S-матричный сдвиг фазы. Здесь у нас нет двух множеств базисных функций, которые обозначаются стрелками \rightarrow и \leftarrow , а только одно такое множество. Появление горизонта вызывает эффект внезапного удвоения числа степеней свободы для поля! Это, однако, не более чем манера говорить, поскольку пространство-время может быть полностью покрыто (вплоть до сингулярности) последовательностью пространственноподобных гиперповерхностей и задача Коши хорошо сформулирована на каждой гиперповерхности из этой последовательности независимо от того, пересекает эта гиперповерхность горизонт или нет. Это означает, что функции \vec{u} , \bar{u} связаны с функцией f с помощью обратимого преобразования Боголюбова:

$$\vec{u}(l, m, p | x) = \int_0^\infty [\vec{\alpha}_l(p, p') f(l, m, p' | x) + \vec{\beta}_l(p, p') \times \\ \times f^*(l, -m, p' | x)] dp', \quad (117)$$

$$\bar{u}(l, m, p | x) = \int_0^\infty [\bar{\alpha}_l(p, p') f(l, m, p' | x) + \bar{\beta}_l(p, p') f^*(l, -m, p' | x)] dp'.$$

Обратимость может быть выражена матричным соотношением [индексы опущены, ср. (15)]

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha} & \overrightarrow{\beta} \\ \overrightarrow{\beta^*} & \overrightarrow{\alpha^*} \\ \overleftarrow{\alpha} & \overleftarrow{\beta} \\ \overleftarrow{\beta^*} & \overleftarrow{\alpha^*} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overrightarrow{\alpha}^\dagger & -\overrightarrow{\beta}^\sim & \overleftarrow{\alpha}^\dagger & -\overleftarrow{\beta}^\sim \\ -\overrightarrow{\beta}^\dagger & \overrightarrow{\alpha}^\sim & -\overleftarrow{\beta}^\dagger & \overleftarrow{\alpha}^\sim \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (118)$$

(здесь "1" обозначает дельта-функцию), которое означает, что

$$\begin{aligned} f(l, m, p | x) = & \int_0^\infty [\overrightarrow{\alpha}_l^*(p', p) \overrightarrow{u}(l, m, p' | x) - \overrightarrow{\beta}_l(p', p) \overrightarrow{u}^*(l, -m, p' | x) + \\ & + \overleftarrow{\alpha}_l^*(p', p) \overleftarrow{u}(l, m, p' | x) - \overleftarrow{\beta}_l(p', p) \overleftarrow{u}^*(l, -m, p' | x)] dp'. \end{aligned} \quad (119)$$

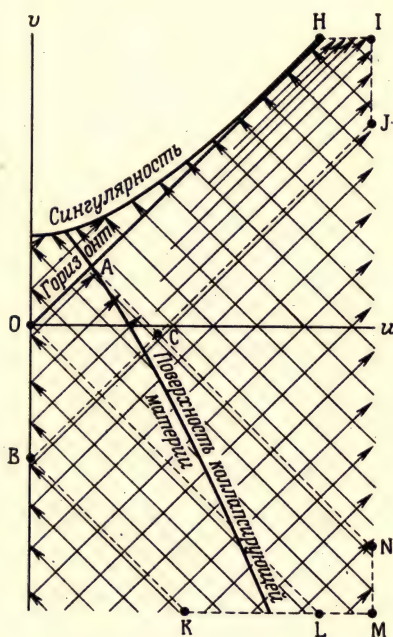
Коэффициенты α и β невозможно вычислить точно. Однако нам необходимы только те части этих коэффициентов, которые связаны со стационарным режимом в поздние моменты времени. Чтобы определить эти части, мы представим пространственно-временное поведение функции f так, как это изображено на фиг. 4. Все приходящие волны, соответствующие любой точке этой фигуры, начинаются на бесконечности с единичной амплитудой. Когда они распространяются внутрь, то те из них, которые лежат над линией OL, расщепляются на две компоненты: компоненту, отвечающую рассеянию назад, и компоненту, которая продолжается через горизонт. В области АНІС обе эти компоненты дают в f полный вклад, который совпадает с функцией \overrightarrow{u} в той же области. Это область стационарности. Следовательно, используя для обозначения стационарной компоненты f полужирный шрифт, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(l, m, p | x) = & \overrightarrow{u}(l, m, p | x) + \int_0^\infty [\overrightarrow{\alpha}_l^*(p', p) \overrightarrow{u}(l, m, p' | x) - \\ & - \overrightarrow{\beta}_l(p', p) \overrightarrow{u}^*(l, -m, p' | x)] dp'. \end{aligned} \quad (120)$$

Интеграл в этом выражении соответствует падающим волнам в области OLKB на фиг. 4 и уходящим волнам в области OACB, которые, как показано, заканчиваются на линии AC, но которые на самом деле продолжают в область стационарности и накладываются на дру-

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

гие уходящие волны в этой области. Интеграл представляет эти волны как линейную комбинацию стационарных функций \vec{u} и \vec{u}^* .



Фиг. 4.

Базисная функция f

5.5. Вычисление коэффициентов преобразования, соответствующего стационарным компонентам

Коэффициенты этой линейной комбинации могут быть определены путем вычисления внутренних произведений

$$\vec{\alpha}_l(p', p) = \langle f(l, m, p), \vec{u}(l, m, p') \rangle, \quad (121)$$

$$\vec{\beta}_l(p', p) = -\langle f^*(l, -m, p), \vec{u}(l, m, p') \rangle, \quad (122)$$

для ранних моментов времени. В ранние моменты времени точный вид внутреннего произведения [см. выражение (6)] неизвестен, потому что мы не знаем метрику внутри материи. Эту трудность, правда,

можно обойти заменой функций (116) широкими волновыми пакетами, относящимися к очень ранним временам, а затем переходя к пределу, когда пакеты становятся сколь угодно большими. Функции F_l превращаются тогда в $\exp(-ipr^*)$, а внутреннее произведение может быть взято в виде

$$\begin{aligned} \langle u_1, u_2 \rangle &= i \int_{-2M}^{\infty} dr \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} r^2 \sin \theta u_1^* \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t} u_2 = \\ &= i \int_{-\infty}^{\infty} dr^* \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi r^2 \sin \theta u_1^* \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial t} u_2, \end{aligned} \quad (123)$$

где двусторонний оператор совпадает с оператором (61) с той лишь разницей, что параметр a выбран равным нулю.

Мы можем проиллюстрировать эту процедуру вычислением коэффициента $\overline{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \overline{\alpha}_l(p', p) &= \frac{1}{8\pi^2 \sqrt{pp'}} \int_{-\infty}^{\infty} dr^* \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \sin \theta \exp \{ip(r^* + t)\} [Y_{lm}(\cos \theta)]^2 \times \\ &\times \left\{ \theta(t_0 - r^* - t) \left(\frac{4Mp'}{t_0 - r^* - t} + p \right) \exp \{i4Mp' [\ln(t_0 - r^* - t) + \right. \\ &+ \ln D]\} + B_l(p)(p' + p) \exp \{ip'(r^* - t)\} \Big\} = \frac{1}{4\pi \sqrt{pp'}} D^{i4Mp'} \times \\ &\times \exp(ip't_0) \int_0^{\infty} (4Mp' x^{-1} + i4Mp' + px^{i4Mp'}) \exp(-ipx) dx, \end{aligned}$$

где $x = t_0 - r^* - t$. Поскольку $p > 0$, контур интегрирования можно повернуть так, чтобы он совпал с нижней частью мнимой оси. Полагая $x = -i\xi/p$, немедленно замечаем, что этот интеграл может быть выражен через гамма-функции. С помощью хорошо известного соотношения $z\Gamma(z) = \Gamma(z+1)$ получаем

$$\overline{\alpha}_l(p', p) = -\frac{ie^{2\pi Mp'}}{2\pi \sqrt{pp'}} D^{i4Mp'} \exp(ip't_0) p^{-i4Mp'} \Gamma(1 + i4Mp'). \quad (124)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Аналогично находим

$$\vec{\beta}_l(p', p) = \frac{i e^{-2\pi M p'}}{2\pi \sqrt{p p'}} D^{i4M p'} \exp(-i p t_0) p^{-i4M p'} \Gamma(1 + i4M p'). \quad (125)$$

Используя для δ -функции представление

$$\delta(x) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty p^{-1 \pm ix} dp \quad (126)$$

и равенство

$$|\Gamma(1 + ix)|^2 = \frac{\pi x}{\operatorname{sh} \pi x}, \quad x - \text{вещественное} \quad (127)$$

и вспоминая, что p' и p'' всегда положительны, легко убедиться, что функции $\vec{\alpha}_l$ и $\vec{\beta}_l$ удовлетворяют следующим условиям ортонормированности¹⁾:

$$\int_0^\infty [\vec{\alpha}_l^*(p'', p) \vec{\alpha}_l(p', p) - \vec{\beta}_l^*(p'', p) \vec{\beta}_l(p', p)] dp = \delta(p' - p''), \quad (128)$$

$$\int_0^\infty \vec{\alpha}_l(p'', p) \vec{\beta}_l(p', p) dp = 0. \quad (129)$$

5.6. Рождение частиц. Планковский спектр. Температура шварцшильдовской черной дыры

Если теперь квантовое состояние в ранние моменты времени выбрано вакуумным по отношению к базисным функциям f , то вакуумное среднее тензора напряжений в области стационарности дается выражением

$$\langle T^{\mu\nu} \rangle = \sum_{l, m} \int_0^\infty T^{\mu\nu}(f(l, m, p | x), f^*(l, m, p | x)) dp =$$

¹⁾ Функции $\vec{\alpha}_l$ и $\vec{\beta}_l$, для которых $\vec{\alpha}_l$ и $\vec{\beta}_l$ являются стационарными компонентами, также удовлетворяют соотношению (128), равно как и соотношению, которое получается из (129) антисимметризацией по p' и p'' [см. выражение (118)].

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{l, m} \left\{ \int_0^{\infty} T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p | x), \vec{u}^*(l, m, p | x)) dp + \right. \\
 &+ \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dp' \int_0^{\infty} dp'' [\vec{\alpha}_l^*(p'', p) \vec{\alpha}_l(p', p) + \\
 &+ \vec{\beta}_l^*(p'', p) \vec{\beta}_l(p', p)] T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p'' | x), \vec{u}^*(l, m, p' | x)) + \\
 &+ \int_0^{\infty} dp \int_0^{\infty} dp' [\vec{\alpha}_l^*(p', p) T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p' | x), \\
 &\vec{u}^*(l, m, p | x)) + \vec{\alpha}_l(p', p) T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p | x), \vec{u}^*(l, m, p' | x)) - \\
 &- \vec{\beta}_l^*(p', p) T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p | x), \vec{u}^*(l, -m, p' | x)) - \\
 &- \vec{\beta}_l(p', p) T^{\mu\nu}(\vec{u}^*(l, m, p' | x), \vec{u}^*(l, -m, p | x))] \}.
 \end{aligned}
 \tag{130}$$

Подынтегральное выражение в фигурных скобках в последнем интеграле очень сильно осциллирует при больших r^* и, следовательно, этот интеграл в пределе $r^* \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Второй интеграл в фигурных скобках (тройной интеграл) может быть сведен к однократному с помощью тех же равенств [соотношения (126) и (127)], которые были использованы для получения условий ортонормированности (128) и (129). Таким образом, получаем

$$\begin{aligned}
 \langle T^{\mu\nu} \rangle_{r^* \rightarrow \infty} &\rightarrow \sum_{l, m} \int_0^{\infty} [T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p | x), \vec{u}^*(l, m, p | x)) + \\
 &+ \text{cth}(4\pi M p) T^{\mu\nu}(\vec{u}(l, m, p | x), \vec{u}^*(l, m, p | x))] dp.
 \end{aligned}
 \tag{131}$$

Чтобы получить интенсивность стационарного потока рождающихся частиц, нам необходимо знать (r, t) -компоненту этого выражения в области над линией ВСJ. Используя явный вид тензора напряжений, находим для обоих случаев, обычного скалярного поля и конформно-инвариантного скалярного поля, следующие выражения¹⁾:

¹⁾ В этих выражениях тензор напряжений взят в виде плотности.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$T_{rt}(\vec{u}(l, m, p|x), \vec{u}^*(l, m, p|x)) \xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{\text{Выше ВСJ}} - \frac{\sin \theta}{8 \pi^2} [Y_{lm}(\cos \theta)]^2 p |B_l|^2, \quad (132)$$

$$T_{rt}(\vec{u}(l, m, p|x), \vec{u}^*(l, m, p|x)) \xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{\text{Выше ВСJ}} \frac{\sin \theta}{8 \pi^2} [Y_{lm}(\cos \theta)]^2 p (1 - |\vec{A}_l|^2), \quad (133)$$

и отсюда, используя равенство (107), получаем

$$\langle T_{rt} \rangle \xrightarrow[r^* \rightarrow \infty]{\text{Выше ВСJ}} - \frac{\sin \theta}{4 \pi^2} \sum_{l, m} [Y_{lm}(\cos \theta)]^2 \int_0^\infty |B_l(p)|^2 \frac{p}{e^{8 \pi M p} - 1} dp. \quad (134)$$

Из (134) немедленно следует, что спектр испускаемого черной дырой излучения планковский! То есть черная дыра выглядит как черное тело, имеющее температуру

$$T = 1/8 \pi k M. \quad (135)$$

и наблюдаемое через фильтр, причем фильтр представлен вероятностным коэффициентом пропускания $|B_l|^2$. Эта связь температуры с черной дырой и составляет суть удивительного открытия Хокинга.

5.7. Непротиворечивость принципам термодинамического равновесия

Следует заметить, что температура зависит только от массы черной дыры и не зависит от деталей ее образования. Температура не зависит также от величины константы взаимодействия (если такое существует) между скалярным полем и коллапсирующей материей. Это можно увидеть следующим образом. Предположим вначале, что никакого взаимодействия не существует. Тогда коллапсирующая материя, даже если вначале она была очень горячей, для наблюдателя на бесконечности будет объектом, имеющим температуру, которая экспоненциально быстро уменьшается (красное смещение) по мере того, как поверхность этого объекта приближается к горизонту. В то же время излучение, порождаемое геометрией, будет по-прежнему наблюдаться на бесконечности как имеющее температуру T . Теперь предположим, что включается взаимодействие. Тогда становится существенным следующий вопрос. Откуда в действительности

возникает излучение? Хотя необходимо проделать еще много работы, чтобы на этот вопрос можно было ответить с полной уверенностью, все же кажется, что есть только два правдоподобных ответа. Излучение либо рождается с постоянной интенсивностью в окрестности горизонта вдоль всей его поверхности, либо подавляющая часть его рождается внутри области ОАСВ (фиг. 3 и 4), которая в основном находится внутри материи. В первом случае не возникает никаких проблем: взаимодействие между материей и излучением не будет влиять на температуру стационарного потока. В последнем случае имеют место следующие аргументы. Поскольку излучение является а) тепловым и б) неисчерпаемым (до тех пор пока черная дыра не распадется сама по себе; см. ниже), любое взаимодействие между ним и материей может служить только тому, чтобы привести материю в состояние с той же температурой, которую имеет излучение. Кванты, достигающие бесконечно удаленного наблюдателя, в этом случае будут в большей своей части излучены материей (переизлучение), т.е. они будут по-прежнему иметь температуру T . Значит, для материи наблюдаемая температура вместо того, чтобы экспоненциально убывать к нулю, стабилизируется на величине T . Между прочим, это наводит на мысль, что для компенсации красного смещения материя должна иметь очень высокую *локальную* температуру (бесконечную, если энергия излучения на самом деле неисчерпаема) в окрестности точки A на фиг. 3 и 4.

Хокинг пришел к выводу о существовании теплового излучения, не опираясь на тензор напряжений, а с помощью рассуждений, связанных с рассмотрением волновых пакетов; и он не дал точного выражения для полной яркости черной дыры. Теперь, используя явный вид для тензора напряжений, легко получить это выражение [ср. с формулой (87)]

$$\frac{dM}{dt} = \lim_{r \rightarrow \infty} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \langle T_{rt} \rangle = -\frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \int_0^\infty (2l+1) |B_l(p)|^2 \frac{p}{e^{p/kT}-1} dp. \quad (136)$$

Выше ВСJ

Если идея температуры не противоречит термодинамическим принципам, то уменьшение массы черной дыры должно прекратиться, если ее лишить уединения и поместить в резервуар с излучением, который

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

имеет такую же температуру, что и температура черной дыры. Тогда должно существовать состояние равновесия, при котором черная дыра поглощает столько же квантов, сколько излучает сама. Это может быть проверено прямым вычислением скорости поглощения. Плотность скалярных фотонов при температуре T , которые имеют импульсы, принадлежащие элементу объема $d^3 p$ из импульсного пространства в окрестности p , равна

$$\frac{d^3 p}{(2\pi)^3 (e^{p/kT} - 1)} \quad (137)$$

Фотоны с импульсом p , которые имеют прицельный параметр, соответствующий угловому моменту l , находятся в коаксиальной трубе, ось которой проходит через центр черной дыры, имеющей площадь кольцевого сечения, равную $(2l + 1)\pi/p^2$. Скорость поглощаемой энергии получается с помощью умножения этой площади на величину $p |\vec{B}_l(p)|^2$ и на выражение (137), где \vec{B}_l — амплитуда прохождения (внутри черной дыры) падающего излучения, и последующего интегрирования по p и суммирования по l . В силу равенства (105) немедленно получаем, что скорость поглощения равна скорости излучения $|dM/dt|^{(1)}$.

5.8. Температура керровской черной дыры

Идея температуры может быть распространена на случай керровских черных дыр. Нетрудно показать [рассматривая, например, интервал (5.1) на экваторе: $\theta = \pi/2$], что в окрестности горизонта для метрики Керра координаты типа крускаловских получаются заменой величины $4M$ в соотношении (109) на величину $4Mr_+/(r_+ - r_-)$. Следствием этого является то, что эффективная температура черной дыры Керра равна

¹⁾ Ларри Форд и Стивен Хокинг показали (частное сообщение), что равновесие между черной дырой и резервуаром с излучением, имеющим ту же температуру, на самом деле неустойчиво. Чем больше энергии излучает черная дыра, тем горячее она становится [см. (146)] и наоборот, чем больше она поглощает, тем больше охлаждается. Некоторые звезды в определенные моменты их эволюционного цикла ведут себя так же.

$$T = \frac{r_+ - r_-}{8 \pi k M r_+}, \quad (138)$$

и выражение (134) должно быть заменено выражением

$$\begin{aligned} \langle T_{rt} \rangle \xrightarrow{r^* \rightarrow \infty} & - \frac{\sin \theta}{4 \pi^2} \sum_{l, m} \int_0^\infty (1 - |\vec{A}_{lm}(p, a)|^2) [S_{lm}(a \vec{\epsilon} | \cos \theta)]^2 \times \\ & \text{Выше ВСЖ} \\ & \times \frac{p}{\exp \{(p - m \Omega_H)/kT\} - 1} dp. \end{aligned} \quad (139)$$

Если масса черной дыры очень велика, так что температура очень мала, то планковский множитель в (139) пренебрежимо мал для $p > m \Omega_H$ и практически равен -1 для $p < m \Omega_H$. Таким образом, в этом пределе выражение (139) сводится к (85). Другими словами, если масса очень велика, то температурное излучение пренебрежимо мало и поток энергии сводится к спонтанному излучению Старобинского и Унру.

5.9. Энтропия черной дыры.

Обобщенный второй закон термодинамики

Если для черной дыры определена температура, то для полноты термодинамической картины необходимо рассмотреть также и ее энтропию. Идею о том, что черной дыре можно было бы поставить в соответствие некоторую энтропию, впервые выдвинул Бекенштейн [1], который использовал аналогию между теоремой Хокинга о площади поверхности черной дыры (98) и вторым законом термодинамики. Эта теорема привела Бекенштейна к определению энтропии как величины, которая пропорциональна площади поверхности черной дыры, а коэффициент пропорциональности он попытался определить из следующих соображений: если материя падает в черную дыру, то энтропия, которую она переносит, для внешнего мира эффективно теряется, т.е. если бы энтропия черной дыры не возрастала на ту же самую величину, то имело бы место нарушение второго закона термодинамики. Простейший объект, который может упасть в черную дыру, — элементарная частица. Наименьшая информация сопоставимая с частицей, — это существует частица или нет, т.е. один *бит* инфор-

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

мации. Таким образом, максимальная энтропия, которую может переносить элементарная частица, равна $k \ln 2$; она совпадает с изменением энтропии черной дыры, $\Delta S = k \ln 2$, которое производит падающая на нее частица. Недавно Кристодулу и Руффини [15] показали, что существует только один тип орбиты, по которой идеализированная точечная частица может пересечь горизонт черной дыры, не вызывая увеличения площади ее поверхности, а именно, по орбите, касательной к горизонту. Если частица имеет радиус r и массу m , то, как показал Бекенштейн, поверхность черной дыры возрастает на величину $\Delta A = 2 \pi r$ даже для этого типа орбит. В квантовой теории все частицы имеют эффективный радиус порядка комптоновской длины волны. Таким образом, $r = \xi / m$ и, следовательно, $\Delta A = 2 \pi \xi$, где ξ некоторое число порядка единицы. Выражения для ΔS и ΔA будут непротиворечивы, если мы определим

$$S = k \frac{\ln 2}{2 \pi \xi} A. \quad (140)$$

Бекенштейн проанализировал это определение также в нескольких других физически интересных контекстах и обнаружил, что оно непротиворечиво во всех случаях.

Открытие Хокинга позволяет определить величину константы ξ . Мы перепишем выражение (98) в следующем виде:

$$dM = \frac{r_+ - r_-}{32 \pi M r_+} dA + \Omega_H dJ = \frac{1}{4} k T dA + \Omega_H dJ, \quad (141)$$

и обратим внимание на аналогию между этим выражением и выражением (34). Мы сразу же приходим к равенству

$$S = \frac{1}{4} k A = 4 \pi k M_{\text{ir}}^2, \quad (142)$$

а следовательно,

$$\xi = 2 \ln 2. \quad (143)$$

Поскольку мы теряем всю информацию о состоянии упорядоченности или неупорядоченности материи, которая падает в черную дыру, то энтропия черной дыры должна совпадать с максимальной энтропией, которую может иметь тело с фиксированной массой и угловым момен-

том. В самом деле, Бекенштейн показал, что по астрофизическим масштабам энтропия, которая дается выражением (142), исключительно велика. Например, энтропия черной дыры, масса которой равна массе Солнца, равна $5 \cdot 10^{60}$ эрг/град, в то время как энтропия самого Солнца порядка только 10^{42} эрг/град.

С введением обобщенного второго закона термодинамики, в котором требуется, чтобы не убывала полная энтропия данной астрофизической системы, включая энтропию любой черной дыры, содержащейся в ней, обобщается теорема Хокинга о поверхности черных дыр. Теперь поверхность черной дыры может уменьшаться, и это действительно будет так, если она не помещена в сосуд с излучением, температура которого больше или равна температуре черной дыры, или не подвергается бомбардировке частицами в какой-либо другой форме.

5.10. Закон уменьшения массы. Критическая масса

Представляет интерес исследование закона уменьшения массы черной дыры, который определяется выражением (136). Для простоты я аппроксимирую интеграл в правой части, предполагая, что величина амплитуды прохождения $B_l(p)$ определяется для всех длин волн, даже для длинных волн, с помощью геометрической оптики. Если функция V_l из выражения (104) для некоторых значений величины r становится положительной, то в приближении геометрической оптики никакого прохождения не будет. Нетрудно убедиться, что для $Mp \gg 1$ прохождение прекращается, когда l больше $\sqrt{27} Mp$, и что точка обрезания по l для амплитуды прохождения не очень сильно отличается от этой величины, даже когда Mp мало. Таким образом, я буду брать

$$B_l(p) \sim \theta(\sqrt{27} Mp - l). \quad (144)$$

Подставляя это выражение в (136) и используя соотношение

$$\sum_l (2l + 1) \theta(\sqrt{27} Mp - l) \approx 27 M^2 p^2, \quad (145)$$

мы получаем

$$\frac{dM}{dt} \sim - \frac{27 M^2}{2 \pi} \int_0^\infty \frac{p^3}{e^{8 \pi Mp} - 1} dp = - \frac{9}{10 \pi \cdot 8^4 \cdot M^2}. \quad (146)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$M^3 \sim M_0^3 - \frac{27}{10 \pi \cdot 8^4} t, \quad (147)$$

где M_0 величина M при $t = 0$. Таким образом, время жизни черной дыры дается формулой

$$\tau \sim \frac{10 \pi \cdot 8^4}{27} M^3, \quad (148)$$

которую следует сравнить с выражением (95). Приближенное выражение (148) может быть улучшено, если разделить его на число различных безмассовых квантов, которые существуют в Природе, а также принять во внимание испускание массивных частиц.

Закон распада, выраженный формулой (147), не экспоненциальный, как в (94), а носит взрывной характер. В последнюю десятую часть секунды своей жизни черная дыра выделяет энергию порядка 10^{30} эрг. Для того чтобы черная дыра прожила не меньше, чем возраст вселенной, ее масса должна превышать 10^{15} г. Если на ранних этапах развития вселенной возникли черные дыры с массами меньше этой, то они больше не существуют.

5.11. Заряженные черные дыры

Гиббонс [28] и Дамур и Руффини [16] рассмотрели проблему рождения частиц заряженными черными дырами. В этом случае, в дополнение к излучению энергии и углового момента с помощью механизма, который мы описали выше, имеется чистое излучение *заряда*, причем за него ответственно электростатическое, а не гравитационное поле черной дыры. Для черных дыр с массой больше, чем 10^{15} г, имеет место процесс излучения, соответствующий парадоксу Клейна; именно он в этом случае доминирует, а скорость излучения определяется формулой Швингера (для рождения пар в постоянном электрическом поле). Для черных дыр с меньшей массой доминирует термический процесс излучения Хокинга, а поток заряда в этом случае аналогичен термическому току. В обоих режимах черная дыра стре-

мится разрядиться, и, до тех пор пока она сверхмассивна или несет неправдоподобно большой заряд, она делает это довольно быстро¹⁾. Следовательно, представляется весьма маловероятным, что малые черные дыры ($M \sim 10^{17}$ г) когда-либо будут наблюдаться в пузырьковой камере, даже если статистически их вокруг значительное количество (что само по себе чрезвычайно маловероятно, как это можно заключить, учитывая известные пределы для плотности массы во вселенной).

5.12. Голая сингулярность

Если поверхность черной дыры обращается в нуль за конечное время, то событие, которое обозначает ее исчезновение, соответствует *голой сингулярности*. Это следует из того, что структура пространства-времени в окрестности исчезающего горизонта событий неизбежно некаузальна. Таким образом, квантовая теория, как оказывается, ведет не только к нарушению теоремы Хокинга о поверхности черной дыры, но нарушает также *принцип космической цензуры* (т.е. принцип, заключающийся в том, что все сингулярности, за исключением первоначального Большого Взрыва, всегда скрыты внутри горизонтов событий). Следовательно, чрезвычайно интересным становится более детальное исследование геометрии распадающейся черной дыры.

К сожалению, вывод теплового излучения, предложенный Хокингом, из-за концентрации внимания в первую очередь на излучении, которое приходит на бесконечность, дает мало или вообще не дает никакой информации об изменениях, которые имеют место вблизи горизонта. Как мы видим, тепловое излучение нечувствительно по отношению к деталям процесса коллапса. Возникает вопрос: можем ли мы получить больше информации с помощью построения идеализированных моделей коллапса, которые позволят нам исследовать поведение базисных функций во время самого коллапса? В самом деле, Хокинг впервые открыл эффект теплового излучения именно этим

¹⁾ Руффини и Вильсон (цитируется в работе Дамура и Руффини [16]) тем не менее полагают, что черные дыры с массой больше, чем $M_{\odot} (= 2 \cdot 10^{33}$ г), могут нести значительный заряд, если они окружены достаточно большим облаком плазмы.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

путем. Однако он был не удовлетворен выводами, поскольку они не объясняли нечувствительность эффекта к выбору модели. Он не публиковал свое открытие до тех пор, пока во время его изложения (частное сообщение) не "нашел путь лучше".

Ульрих Герлах [27] и Давид Бульвар [3] недавно воспроизвели результат Хокинга, используя модель коллапсирующей сферической пылевой оболочки. Оказалось, что из их анализа *выясняется* следующая картина. Тепловое излучение возникает в самой оболочке. Оболочка остается всегда вне горизонта. Излучение отнимает кинетическую энергию от оболочки; поверхность горизонта, которая пропорциональна квадрату суммы энергии покоя, кинетической и гравитационной энергии связи оболочки, стационарно уменьшается. Поверхность оболочки и поверхность горизонта исчезают одновременно.

Однако остается выяснить еще много вопросов, прежде чем эта картина может быть принята как твердо установленный факт. Прежде всего маловероятно, что коллапс оболочки имеет какой-либо смысл, когда он происходит после того момента, когда радиус ее достигает абсолютной единицы длины $\sim 10^{-33}$ см (так называемой "планковской длины"). В этот момент из-за квантовых флуктуаций самого гравитационного поля нарушается концепция классической "фоновой геометрии". О том, что лежит за этим пределом, можно лишь догадываться.

Во-вторых, в настоящее время между специалистами существует некоторое разногласие по поводу "локальной реалистичности" теплового излучения. Все согласны с тем, что на бесконечности излучение действительно существует. Разногласия возникают по поводу реальности излучения вблизи горизонта. Хокинг [31] считает бессмысленным говорить, что излучение возникает в некоторой данной области. Потому, что горизонт — это некоторый глобальный объект, и потому, что наблюдатель, пересекающий горизонт во время свободного падения, не замечает ничего необычного в геометрии этой области, Хокинг, в частности, не признает соображения о том, что излучение возникает вблизи горизонта. Разногласие усложняется еще трудностью определения понятия "частицы" в отсутствие времениподобного векторного поля Киллинга и настойчивыми замечаниями некоторых авторов о том, что объект, который свободно падающий наблюдатель называет частицей, отличается от того, что

называет частицей ускоренный наблюдатель (например, "покоящийся" в поле Шварцшильда).

Если прекратить бессмысленные дискуссии, то сразу станет очевидной настоятельная необходимость попытаться разрешить последнее из разногласий с помощью построения точных моделей для "детекторов частиц" и выяснения их поведения в условиях свободного падения и ускорения. Но, наверно, столь же необходимо вернуться (по крайней мере на некоторое время) к этому спорному вопросу об определении частиц и локализации места их рождения и задать вместо этого вопрос: чему равно квантовое среднее тензора напряжений вблизи горизонта? Какое изменение возникает в геометрии пространства-времени (как внутри, так и вне горизонта) под влиянием этого среднего? Как я заметил выше, правильное определение эффективного тензора напряжений должно учитывать не только появившиеся реальные частицы, но также и виртуальные, и, следовательно, эффективный тензор напряжений не может быть хорошо определен до тех пор, пока у нас нет хорошо определенного и непротиворечивого пути регуляризации и перенормировки $T^{\mu\nu}$.

6. РАСХОДИМОСТИ

6.1. Резюме различных подходов

Методы, которые до настоящего времени предлагались для работы с расходящимися частями тензора $T^{\mu\nu}$, распадаются на два класса: 1) ковариантные схемы, имеющие своей целью показать, что расходимости могут сокращаться путем введения контрчленов в функционал гравитационного действия, и 2) методы, зависящие от системы координат, которые вводились в соответствии с контекстом конкретных физических задач. Среди имен авторов, связанных с развитием методов из первого класса, — Офт и Вельтман [33], Каппер и Рамон-Медрано [7] (см. также Каппер, Лейббрандт и Рамон-Медрано [8] и Каппер, Дафф и Гальперн [9]), Дезер и Ван Нивенхёйзен [18], и Утияма и де Витт [48]; авторы, связанные с развитием методов из второго класса, — это Зельдович и Старобинский [52] (см. также Зельдович, Лукаш и Старобинский [53]) и Паркер и Фуллинг [39] (см. также Фуллинг и Паркер [25] и Фуллинг, Паркер и Ху [26]).

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Авторы, развивавшие второй класс методов, вначале интересовались рождением частиц на ранних этапах развития вселенной и в течение ее заключительного коллапса. Одна из их целей состояла в том, чтобы определить, действительно ли рождение частиц, вызываемое кривизной пространства, а также связанные с ней виртуальные процессы могут привести к затуханию любой начальной анизотропии, которая существовала во вселенной, и к космологии, которая находится в согласии с настоящими наблюдениями. Для этого им нужен конечный тензор напряжений, из которого вычтены бесконечности, чтобы его можно было использовать как источник обратного влияния на геометрию пространства-времени. Зельдович и его коллеги несколько прогматически выбрали в рамках пространственно-плоской модели Казнера чрезвычайно простой алгоритм для вычитания этих бесконечностей и обнаружили, что получающийся в результате этого тензор напряжений приводит к быстрой изотропизации вселенной. (О деталях см. литературу.) Паркер и Фуллинг, которых больше интересовал теоретический аспект проблем, попытались пойти дальше этого алгоритма, распространив его на случай, когда трехмерное пространство искривлено, и показав, что вычитания можно свести к соответствующим образом выбранным контрчленам в функционале гравитационного действия. Таким образом, они пытаются дать убедительное физическое оправдание (или по крайней мере проверку непротиворечивости) для этого алгоритма и установить связь с ковариантными схемами из методов первого класса. В настоящее время они достигли лишь частичного успеха; правда, остается несколько сбивающих с толку конечных членов, которые невозможно идентифицировать с тензорными компонентами нужного типа.

Главный камень преткновения в исследованиях такого рода заключается в трудности учета априорного геометрического (тензорного) характера отдельных частей расходящихся сумм по модам, когда базисные функции таковы, что соответствуют только очень ограниченному типу геометрий. К сожалению, ковариантные схемы из методов первого класса, о которых мы говорили выше, не могут помочь по двум причинам. Во-первых, непосредственно их можно использовать только для слабых (линеаризованных) гравитационных полей в

плоском пространстве-времени¹⁾, и во-вторых, они применимы только, если вся проблема может быть сформулирована лоренц-ковариантным образом. Существует, однако, известная как "метод фонового поля", которая обходит проблему лоренцевой ковариантности, а сразу дает настоящую общую ковариантность. Именно эту технику я пытаюсь популяризовать последние несколько лет [19, 20]. Те, кто занимается теорией эффективного потенциала и теориями слабого взаимодействия типа Янга — Миллса, признали ее полезной, и если бы не требовалось усилий, необходимых для овладения этой техникой (для овладения всеми другими приемами квантовой теории поля необходимо учиться, чтобы эффективно ее использовать), то сейчас больше специалистов в общей теории относительности признало бы ее полезность. Во всяком случае это единственный метод, который, насколько я понимаю, кажется, способен разрешить трудности, возникшие в настоящее время, и в этом последнем разделе я использую его как средство для того, чтобы продемонстрировать основную идею схемы Зельдовича — Старобинского и показать, как могут быть достигнуты цели, которые ставили перед собой Паркер и Фуллинг.

6.2. "In"- и "out"-области, коэффициенты Боголюбова и S-матрица

Для того чтобы изложить основные идеи, предположим, что в пространстве-времени имеются две причинно связанные стационарные области, именно область "in" и область "out", каждая из которых обладает полной гиперповерхностью Коши и времениподобным векторным полем Киллинга, как это описано в разд. 1. Трехмерное пространство может быть либо конечно, либо бесконечно с произвольной связанностью. Позже я покажу, что предположение о существовании in- и out-областей для конечных результатов несущественно.

¹⁾ Авторы методов из первого класса обычно выделяют контрчлены, имеющие полную общую ковариантность, но они поступают некорректно. Все, что они проверяют непосредственно с помощью лоренц-ковариантных вычислений замкнутых петель в импульсном пространстве — это лишь квадратичные части этих членов. Полные контрчлены получаются, если призвать на помощь общую ковариантность и (или) так называемые тождества Уорда — Славнова.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Выбранная нами процедура вычитания будет оставаться справедливой и в пределе, когда объемы этих областей стремятся к нулю.

Пусть $\{u_{in,i}\}$ и $\{u_{out,i}\}$ — полные наборы положительно-частотных нормированных базисных функций соответственно в областях in и out . Они будут связаны между собой преобразованием Боголюбова [ср. (14)]:

$$u_{out,i} = \sum_j (\alpha_{ij} u_{in,j} + \beta_{ij} u_{in,j}^*), \quad (149)$$

где коэффициенты преобразования удовлетворяют соотношению (15). Я буду предполагать для простоты, что квантовое поле скалярно, однако не буду требовать, чтобы оно было безмассовым или конформно-инвариантным. Уравнение поля будет иметь вид

$$F\phi \equiv g^{1/2}(\phi_{;\mu}^{\mu} - \xi R\phi - m^2\phi) = 0, \quad (150)$$

где m — масса, R — скалярная кривизна, а ξ — численная константа. (Для конформно-инвариантного поля $m = 0$ и $\xi = 1/6$.) Методы и качественные результаты настоящего раздела будут справедливы также для полей со спином, как фермионных, так и бозонных.

Векторы вакуумного состояния в in - и out -областях определяются соотношениями

$$a_{in,i} |in, vac\rangle = 0, \quad a_{out,i} |out, vac\rangle = 0, \quad (151)$$

для любого i , где

$$\phi = \sum_i (a_{in,i} u_{in,i} + a_{in,i}^* u_{in,i}^*) = \sum_i (a_{out,i} u_{out,i} + a_{out,i}^* u_{out,i}^*). \quad (152)$$

Операторы уничтожения в in - и out -областях связаны между собой соотношениями [ср. (16)]

$$a_{out,i} = \sum_j (\alpha_{ij}^* a_{in,j} - \beta_{ij}^* a_{in,j}^*), \quad a_{in,i} = \sum_j (\alpha_{ji} a_{out,j} + \beta_{ji}^* a_{out,j}^*). \quad (153)$$

Эти соотношения позволяют выразить S -матрицу с помощью коэффициентов Боголюбова.

6.3. Амплитуды рождения и уничтожения частиц

Для квантовой космологии особый интерес представляют амплитуды многочастичного рождения и уничтожения:

$$i^{n/2} V_{i_1 \dots i_n} \equiv e^{-iW} \langle \text{out}, i_1 \dots i_n | \text{in}, \text{vac} \rangle, \quad (154)$$

$$i^{n/2} \Lambda_{i_1 \dots i_n} \equiv e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | \text{in}, i_1 \dots i_n \rangle, \quad (155)$$

где

$$e^{iW} \equiv \langle \text{out}, \text{vac} | \text{in}, \text{vac} \rangle, \quad (156)$$

$$| \text{in}, i_1 \dots i_n \rangle \equiv a_{\text{in}, i_1}^* \dots a_{\text{in}, i_n}^* | \text{in}, \text{vac} \rangle, \quad (157)$$

$$| \text{out}, i_1 \dots i_n \rangle \equiv a_{\text{out}, i_1}^* \dots a_{\text{out}, i_n}^* | \text{out}, \text{vac} \rangle. \quad (158)$$

Предполагая, что векторные состояния in- и out-вакуумов нормированы на единицу, можно написать

$$| \text{in}, \text{vac} \rangle = e^{iW} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{j_1 \dots j_n} V_{j_1 \dots j_n} | \text{out}, j_1 \dots j_n \rangle, \quad (159)$$

$$| \text{out}, \text{vac} \rangle = e^{-iW} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n/2}}{n!} \sum_{j_1 \dots j_n} \Lambda_{j_1 \dots j_n}^* | \text{in}, j_1 \dots j_n \rangle.$$

Подстановка этих выражений в (151) и использование соотношений (153) дает равенство

$$0 = e^{iW} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{j_1 \dots j_n, k} \{ i^{1/2} V_{j_1 \dots j_n, k} \alpha_{ki} | \text{out}, j_1 \dots j_n \rangle + \\ + V_{j_1 \dots j_n} \beta_{ki}^* | \text{out}, k, j_1 \dots j_n \rangle \}, \quad (160)$$

$$0 = e^{-iW} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^{n/2}}{n!} \sum_{j_1 \dots j_n, k} \{ (-i)^{1/2} \Lambda_{j_1 \dots j_n, k}^* \alpha_{ik} | \text{in}, j_1 \dots j_n \rangle - \\ - \Lambda_{j_1 \dots j_n}^* \beta_{ik}^* | \text{in}, k, j_1 \dots j_n \rangle \}, \quad (161)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

из которых можно заключить, что

$$V_{ij} = i \sum_k \beta_{ki}^* \alpha_{jk}^{-1}, \quad \Lambda_{ij} = -i \sum_k \beta_{ki} \alpha_{kj}^{-1}, \quad (162)$$

$$V_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетное,} \\ \sum_p V_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}, & n \text{ четное,} \end{cases} \quad (163)$$

$$\Lambda_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} 0, & n \text{ нечетное,} \\ \sum_p \Lambda_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} i_n}, & n \text{ четное,} \end{cases} \quad (164)$$

где \sum_p означает суммирование по $n!/2^{n/2} (n/2)!$ различным спариваниям индексов $i_1 \dots i_n$.

Соотношения (163) и (164) показывают, что процессы рождения и уничтожения частиц состоят из индивидуальных событий рождения и уничтожения пар. Полная симметрия амплитуд (случай бозе-статистики), в частности симметрия

$$V_{ij} = V_{ji}, \quad \Lambda_{ij} = \Lambda_{ji}, \quad (165)$$

следует из соотношения (15). (В случае фермионов имеет место полная антисимметрия.) Существование обратной матрицы (α_{ij}^{-1}) , появляющейся в соотношениях (162), следует из равенства

$$\alpha \alpha^\dagger = 1 + \beta \beta^\dagger \quad (\text{положительно определено}). \quad (166)$$

6.4. Амплитуды одночастичного рассеяния и оптические теоремы

Оставшиеся структурные элементы S-матрицы являются амплитудами одночастичного рассеяния

$$\begin{aligned} \delta_{ij} + i l_{ij} &\equiv e^{-iW} \langle \text{out}, i | \text{in}, j \rangle = e^{-iW} \langle \text{out}, i | a_{\text{in}, j}^* | \text{in}, \text{vac} \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{k_1 \dots k_n, l} V_{k_1 \dots k_n} \langle \text{out}, i | \alpha_{lj}^* a_{\text{out}, l}^* + \\ &+ \beta_{lj} a_{\text{out}, l} | \text{out}, k_1 \dots k_n \rangle = \\ &= \alpha_{ij}^* + i \sum_l V_{il} \beta_{lj}. \end{aligned} \quad (167)$$

Опуская индексы и используя симметрию V_{ij} , можно переписать это выражение в виде

$$\begin{aligned} 1 + iI &= \alpha^* - (\beta^* \alpha^{-1})^\sim \beta = \alpha^* - \alpha^{-1\sim} \beta^\dagger \beta = \\ &= \alpha^* - \alpha^{-1\sim} (\alpha^\sim \alpha^* - 1) = \alpha^{-1\sim}. \end{aligned} \quad (168)$$

Основное содержание соотношения (15) заключается тогда в следующих тождествах, которые можно из него вывести:

$$\begin{aligned} (1 + iI)(1 - iI^\dagger) &= 1 - VV^\dagger, \\ (1 - iI^\dagger)(1 + iI) &= 1 - \Lambda^\dagger \Lambda, \\ V^\dagger(1 + iI) &= (1 - iI^*)\Lambda, \\ \Lambda(1 - iI^\dagger) &= (1 + iI^\sim) V^\dagger. \end{aligned} \quad (169)$$

Эти тождества составляют релятивистский вариант хорошо известной оптической теоремы и вместе с соотношением (172) (см. ниже) гарантируют унитарность полной многочастичной S -матрицы. (См. де Витт [20]. О фермионном случае см. Швингер [44].)

6.5. Амплитуда перехода вакуум — вакуум.

Связь расходимостей в этой амплитуде с расходимостями в $T^{\mu\nu}$

Единственный момент, выпавший из предыдущего рассмотрения, — это амплитуда переходов вакуум — вакуум. Ее можно получить, налагая на полную вероятность перехода из начального вакуумного состояния условие равенства ее единице

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} | \langle \text{out}, i_1 \dots i_n | \text{in}, \text{vac} \rangle |^2 = \\ &= e^{-2 \text{Im } W} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} | V_{i_1 \dots i_n} |^2 = \\ &= e^{-2 \text{Im } W} \det(1 - VV^\dagger)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (170)$$

откуда в силу (169) получаем

$$e^{-2 \text{Im } W} = \det(1 - VV^\dagger)^{1/2} = \det(1 - \Lambda^\dagger \Lambda)^{1/2}, \quad (171)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

а при естественном выборе фазы имеем

$$e^{iW} = \det(1 + iI)^{1/2} = (\det \alpha)^{-1/2}. \quad (172)$$

Детерминанты, написанные выше, — это детерминанты фредгольмовского типа, для их оценки имеется в принципе большое число различных методов. Детерминанты (171), которые определяют мнимую часть W , конечны. Однако детерминанты (172), которые определяют реальную часть W (и, следовательно, естественную фазу), содержат расходимости, фактически те же самые расходимости, что содержит тензор напряжений. Чтобы увидеть это, представим, что метрический тензор подвергается инфинитезимальному изменению $\delta g_{\mu\nu}$, которое приводит к соответствующему изменению δS функционала действия (4) для поля ϕ . Если носитель вариации $\delta g_{\mu\nu}$ находится в пространственно-временной области между in- и out-областями, то, согласно хорошо известному вариационному принципу (который включает в себя естественную фазу), получаем соотношение

$$\begin{aligned} \delta W &= -ie^{-iW} \delta e^{iW} = -ie^{-iW} \delta \langle \text{out}, \text{vac} | \text{in}, \text{vac} \rangle = \\ &= e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | \delta S | \text{in}, \text{vac} \rangle, \end{aligned} \quad (173)$$

которое в силу (11) дает

$$\begin{aligned} 2 \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} &= e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | T^{\mu\nu}(\phi, \phi) | \text{in}, \text{vac} \rangle = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^{n/2}}{n!} \sum_{i_1 \dots i_n} \Lambda_{i_1 \dots i_n} \langle \text{in}, i_1 \dots i_n | T^{\mu\nu}(\phi, \phi) | \text{in}, \text{vac} \rangle = \\ &= \sum_i T^{\mu\nu}(u_{\text{in}, i}, u_{\text{in}, i}^*) + i \sum_{i, j} \Lambda_{ij} T^{\mu\nu}(u_{\text{in}, i}^*, u_{\text{in}, j}^*). \end{aligned} \quad (174)$$

Предположим, что в in-области частиц нет. Тогда первый член в правой части (174) (последнее равенство) является вакуумным средним тензора напряжений, и мы получаем

$$\langle \text{in}, \text{vac} | T^{\mu\nu} | \text{in}, \text{vac} \rangle = 2 \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} - i \sum_{i, j} \Lambda_{ij} T^{\mu\nu}(u_{\text{in}, i}^*, u_{\text{in}, j}^*). \quad (175)$$

Аналогично получаем

$$\langle \text{out}, \text{vac} | T^{\mu\nu} | \text{out}, \text{vac} \rangle = 2 \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} - i \sum_{i,j} V_{ij} T^{\mu\nu}(u_{\text{out},i}^*, u_{\text{out},j}^*), \quad (176)$$

и вообще аналогичные выражения также имеют место для средних тензора напряжений по другим состояниям. Вторые члены в правых частях (175) и (176) (и аналогичные члены для средних по другим состояниям) конечны. В каждом случае расходимости содержатся в члене $2 \delta W / \delta g_{\mu\nu}$. Таким образом, чтобы исследовать расходимости, достаточно исследовать функцию W .

6.6. Анализ W методом функций Грина

Удобно начать этот анализ с переписывания вариационного равенства (173) в более явном виде:

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | \phi \delta F \phi | \text{in}, \text{vac} \rangle = \\ &= \frac{1}{4} e^{-iW} \text{Sp} (\delta F \langle \text{out}, \text{vac} | [\phi, \phi]_+ | \text{in}, \text{vac} \rangle), \end{aligned} \quad (177)$$

где Sp означает, что интегрирование должно проводиться по всем опущенным пространственно-временным индексам, которые есть у δF и обоих полей ϕ . Введение антикоммутатора возможно из-за симметрии (реальности) самосопряженного оператора δF в бозонном случае. (В случае фермионов должен был бы появиться коммутатор.) Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\phi(x), \phi(x')]_+ - (\phi(x) \phi(x'))_+ &= \\ &= \frac{1}{2} [\theta(x', x) - \theta(x, x')] [\phi(x), \phi(x')]_-, \end{aligned} \quad (178)$$

где " $+$ " обозначает хронологическое произведение, а $\theta(x, x')$ — хронологическую ступенчатую функцию:

$$\theta(x, x') = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ лежит в будущем от пространственно-} \\ & \text{подобной гиперповерхности, проходящей через } x'; \\ 0 & \text{в противоположном случае.} \end{cases} \quad (179)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Из-за коммутативности полей ϕ для пространственноподобных расстояний выбор гиперповерхности в определении (179) несуществен. Хорошо известно (см. Пайерлс [40]), что коммутатор полей ϕ определяется соотношением

$$[\phi(x), \phi(x')]_- = i[G_{\text{adv}}(x, x') - G_{\text{ret}}(x, x')], \quad (180)$$

где G_{adv} и G_{ret} — опережающая и запаздывающая функции Грина для оператора F . Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [\phi(x), \phi(x')]_+ - (\phi(x) \phi(x'))_+ &= \\ &= \frac{1}{2} i [G_{\text{adv}}(x, x') + G_{\text{ret}}(x, x')] \equiv i \bar{G}(x, x'). \end{aligned} \quad (181)$$

Хорошо известно также, что¹⁾

$$e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | (\phi(x) \phi(x'))_+ | \text{in}, \text{vac} \rangle = -iG(x, x'), \quad (182)$$

где G — фейнмановский пропагатор, связанный с областями **in** и **out**, т.е. такая функция Грина для F , которая, если рассматривать ее как функцию обоих аргументов, имеет чисто положительно-частотное поведение в **out**-области и чисто отрицательно-частотное поведение в **in**-области. [Выражение (182) проще всего получить, вводя внешний источник $J(x)$ между **in**- и **out**-областями (линейно связанный с полем $\phi(x)$ в S), вычисляя вторую вариацию от W по J и полагая J равным нулю.] Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-iW} \langle \text{out}, \text{vac} | [\phi(x), \phi(x')]_+ | \text{in}, \text{vac} \rangle &= -i [G(x, x') - \bar{G}(x, x')] \equiv \\ &\equiv \frac{1}{2} G^{(1)}(x, x'). \end{aligned} \quad (183)$$

Функцию $G^{(1)}$ называют иногда "элементарной функцией Адамара".

С помощью различных функций Грина (см. выше) вариационное соотношение (177) можно представить в виде следующих компактных выражений (индексы опущены):

¹⁾ Определение (182) для фейнмановского пропагатора отличается от обычного на множитель i . Выбор такого определения имеет то преимущество, что все функции Грина тогда удовлетворяют одному и тому же уравнению $FG(x, x') = -\delta(x, x')$.

$$\begin{aligned}\delta W &= \frac{1}{4} \text{Sp}(G^{(1)} \delta F) = -\frac{1}{2} i \text{Sp}(G \delta F - \bar{G} \delta F) = \\ &= -\frac{1}{2} i \text{Sp}(G \delta F - G_{\text{adv}} \delta F). \quad (184)\end{aligned}$$

Поскольку

$$FG = -1, \quad FG_{\text{adv}} = -1, \quad (185)$$

то уравнение (184) можно формально проинтегрировать; в результате имеем

$$W = -\frac{1}{2} i (\ln \det G - \ln \det G_{\text{adv}}) + \Phi, \quad (186)$$

$$e^{iW} = e^{i\Phi} (\det G)^{1/2} / (\det G_{\text{adv}})^{1/2}, \quad (187)$$

где Φ — постоянная (обязательно вещественная) фаза, не зависящая от матрицы.

6.7. Формализм Швингера

Уравнение (184) показывает, что для того чтобы вычислить функциональную производную от W по метрике, достаточно знать функции Грина G и \bar{G} . Конечно, получить полную информацию об этих функциях так же трудно, как о средних самого тензора напряжений. Однако поскольку F (и, следовательно, δF) является локальным дифференциальным оператором, нам необходимо знать только, как ведут себя эти функции, когда две точки x и x' близки друг к другу. Для этой цели особенно удобна техника Швингера [43]. Вводится некоторое фиктивное (т.е. некантовомеханическое) гильбертово пространство, множество формальных операторов \mathbf{x}^μ , \mathbf{p}_ν , удовлетворяющих коммутационным соотношениям

$$[\mathbf{x}^\mu, \mathbf{x}^\nu] = 0, \quad [\mathbf{x}^\mu, \mathbf{p}_\nu] = i \delta_\nu^\mu, \quad [\mathbf{p}_\mu, \mathbf{p}_\nu] = 0, \quad (188)$$

и множество собственных векторов $|x\rangle$ оператора \mathbf{x}^μ , нормированных согласно равенству

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x, x'). \quad (189)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Тогда можно записать, что

$$\begin{aligned} g^{-1/4}(x) F(x, x') g^{-1/4}(x') &= \langle x | g^{-1/4} \mathbf{F} g^{-1/4} | x' \rangle, \\ g^{1/4}(x) G(x, x') g^{1/4}(x') &= \langle x | g^{1/4} \mathbf{G} g^{1/4} | x' \rangle, \end{aligned} \quad (190)$$

где [см. выражение (150)]

$$g^{-1/4} \mathbf{F} g^{-1/4} = -g^{-1/4} p_\mu g^{1/2} g^{\mu\nu} p_\nu g^{-1/4} - \xi R - m^2, \quad (191)$$

$$g \equiv -\det(g_{\mu\nu}), \quad g_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu}(x) \quad \text{и т.д.} \quad (192)$$

и

$$\mathbf{F} \mathbf{G} = -1. \quad (193)$$

При координатных преобразованиях базисные векторы $|x\rangle$ преобразуются как плотности с весом $1/2$; выше добавлены множители $g^{1/4}$, $g^{-1/4}$, чтобы получить операторы, оставляющие эти свойства преобразований неизменными.

6.8. Фейнмановский пропагатор и разложение ВКБ

Оказывается, что знание фейнмановского пропагатора автоматически дает знание функций Грина G_{ret} , G_{adv} и \bar{G} . Следовательно, мы можем сосредоточить свое внимание на фейнмановском пропагаторе. Хорошо известно, что в плоском пространстве-времени граничные условия для фейнмановского пропагатора автоматически обеспечиваются прибавлением к m^2 инфинитезимальной отрицательной мнимой части или, что одно и то же, добавлением к оператору \mathbf{F} инфинитезимальной положительной мнимой части. Это простое правило можно проверить с помощью теории возмущений, а также с помощью более общей техники; оно остается верным и в рассматриваемом здесь случае искривленного пространства-времени. Единственное ограничение состоит в том, что точки x и x' должны лежать либо в области in, либо в области out, либо в области между ними, а все интегрирования (и вариации) должны быть ограничены этой областью.

Поэтому мы можем записать

$$g^{1/4} \mathbf{G} g^{1/4} = -\frac{1}{g^{-1/4} \mathbf{F} g^{-1/4} + i0} = i \int_0^\infty \exp(i g^{-1/4} \mathbf{F} g^{-1/4} s) ds, \quad (194)$$

это дает

$$G(x, x') = i \int_0^{\infty} g^{-1/4}(x) \langle x, s | x', 0 \rangle g^{-1/4}(x') ds, \quad (195)$$

где

$$\langle x, s | x', 0 \rangle \equiv \langle x | \exp(i g^{-1/4} F g^{-1/4} s) | x' \rangle. \quad (196)$$

Матричный элемент (196) можно рассматривать как амплитуду перехода для фиктивной динамической системы. Эта амплитуда удовлетворяет "уравнению Шредингера":

$$i \frac{\partial}{\partial s} \langle x, s | x', 0 \rangle = (-\nabla_{\mu} \nabla^{\mu} + \xi R + m^2) \langle x, s | x', 0 \rangle, \quad (197)$$

где ∇_{μ} обозначает ковариантную производную. Когда точки x и x' близки друг к другу, для изучения этой амплитуды достаточно ВКБ-разложения:

$$\langle x, s | x', 0 \rangle = -\frac{i}{(4\pi)^2} \frac{D^{1/2}(x, x')}{s^2} \exp \left[i \frac{\sigma(x, x')}{2s} - im^2 s + \Omega(x, x', s) \right]. \quad (198)$$

Здесь функция Ω обращается в нуль, когда $s = 0$, она будет определена ниже; величина σ — это половина квадрата расстояния между точками x и x' , измеренного вдоль геодезической, а D — детерминант матрицы 4×4

$$D \equiv -\det(-\partial^2 \sigma / \partial x^{\mu} \partial x'^{\nu}). \quad (199)$$

Если не принимать во внимание множитель $(16 s^4)^{-1}$, то D совпадает с *детерминантом Ван Флека — Моретта* (см. Ван Флек [49] и Моретт [36]) для динамической системы с функцией действия $\sigma/2s$ [т.е. для частицы с массой $1/2$, совершающей движение в некотором четырехмерном многообразии, метрика которого имеет сигнатуру $(-, +, +, +)$]. Этот детерминант удовлетворяет тождеству

$$D^{-1}(D \sigma_{;\mu}^{\mu});_{\mu} = 4, \quad (200)$$

которое можно вывести из "уравнения Гамильтона — Якоби"

$$\sigma = \frac{1}{2} \sigma_{;\mu}^{\mu} \sigma^{\mu} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \sigma_{,\mu} \sigma_{,\nu}. \quad (201)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Когда точки x и x' достаточно близки друг к другу, D и σ можно считать однозначными функциями. В случае когда имеется более чем одна геодезическая, соединяющая точки x и x' , выражение (198), строго говоря, следует изменить, добавляя к нему дополнительные члены, по одному для каждой геодезической¹⁾. В частности, для компактного трехмерного пространства число таких геодезических бесконечно, т.е. необходимо бесконечное число таких дополнительных членов (см. Даукер [21, 22]). Однако существует один ведущий член, который приводит к расходимостям в теории, поэтому рассматривать я буду только его. Численный множитель перед ним выбран так, чтобы гарантировать условия нормировки

$$\langle x, s | x', 0 \rangle \xrightarrow{s \rightarrow 0} \delta(x, x'). \quad (202)$$

Подставляя выражение (198) в (197) и используя равенства (200) и (201), получаем, что функция Ω должна удовлетворять дифференциальному уравнению

$$i \partial \Omega / \partial s + D^{-1} (D \Omega_{;\mu})_{;\mu} + \Omega_{;\mu} \Omega^{\mu}_{;\mu} + i s^{-1} \sigma^{\mu}_{;\mu} \Omega_{;\mu} = \xi R - D^{-1/2} D^{1/2}_{;\mu}. \quad (203)$$

Решение этого уравнения, которое обращается в нуль при s , стремящемся к нулю, можно представить в виде степенного ряда:

$$\Omega(x, x', s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, x') (is)^n, \quad (204)$$

где коэффициенты определяются с помощью рекуррентных дифференциальных соотношений

$$\begin{aligned} \sigma^{\mu}_{;\mu} a_{1;\mu} + a_1 &= D^{-1/2} D^{1/2}_{;\mu} - \xi R, \\ \sigma^{\mu}_{;\mu} a_{2;\mu} + 2a_2 &= D^{-1} (D a_{1;\mu})_{;\mu}, \\ \sigma^{\mu}_{;\mu} a_{n;\mu} + n a_n &= D^{-1} (D a_{n-1;\mu})_{;\mu} + \sum_{r=1}^{n-2} a_{r;\mu} a_{n-r-1;\mu}, \quad n = 3, 4, \dots \end{aligned} \quad (205)$$

¹⁾ Если точки x и x' , расположенные вдоль одной из этих геодезических, являются почти сопряженными, то для соответствующего члена в методе ВКБ должна быть использована интерполяция Эйри (или ее обобщение).

В принципе эти соотношения можно последовательно разрешить с помощью интегрирования вдоль геодезических, выходящих из точки x' .

6.9. Разложения в ряды

Для функции $G(x, x')$ мы имеем теперь выражение

$$G(x, x') = \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^2} \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} \exp\{i(\sigma/2s - m^2 s)\} e^{\Omega(s)} ds, \quad (206)$$

где

$$\Delta(x, x') = g^{-\frac{1}{2}}(x) D(x, x') g^{-\frac{1}{2}}(x'). \quad (207)$$

Интеграл (206) можно оценить, представляя его в виде асимптотического ряда по обратным степеням m^2 , с помощью разложения множителя $\exp\{\Omega(s)\}$ в степенной ряд по s и почленного интегрирования:

$$\begin{aligned} G(x, x') &\sim \frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{(4\pi)^2} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n \right] \int_0^{\infty} \frac{1}{s^2} \exp\{i(\sigma/2s - m^2 s)\} ds = \\ &= -\frac{\Delta^{\frac{1}{2}}}{8\pi} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n \right] \frac{m^2 H_1^{(2)}((-2m^2\sigma)^{\frac{1}{2}})}{(-2m^2\sigma)^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (208)$$

Здесь $H_1^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода первого порядка. Более точно:

$$\begin{aligned} \frac{m^2 H_1^{(2)}((-2m^2\sigma)^{\frac{1}{2}})}{(-2m^2\sigma)^{\frac{1}{2}}} &= \frac{1}{\pi i} \left(\frac{1}{\sigma + i0} + 2m^2 \left\{ \left[\gamma + \frac{1}{2} \ln(m^2/2) + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \ln(\sigma + i0) \right] \times \left[\frac{1}{2} + \frac{2m^2\sigma}{2^2 \cdot 4} + \frac{(2m^2\sigma)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right] - \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} - \frac{2m^2\sigma}{2^2 \cdot 4} \left(1 + \frac{1}{4} \right) - \frac{(2m^2\sigma)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) - \dots \right\} \right). \end{aligned} \quad (209)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Слагаемые $i0$ появляются потому, что функция Грина G в действительности является *обобщенной функцией*, т.е. "граничным значением" функции аналитической в верхней σ -полуплоскости. С помощью соотношений

$$\frac{1}{\sigma + i0} = \frac{1}{\sigma} - \pi i \delta(\sigma), \quad \ln(\sigma + i0) = \ln|\sigma| + \pi i \theta(-\sigma) \quad (210)$$

легко разложить функцию G на две ее компоненты \bar{G} и $G^{(1)}$ [см. (183)]:

$$\begin{aligned} \bar{G}(x, x') = & \frac{\Delta^{1/2}}{8\pi} \exp \left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{\partial}{\partial m^2} \right)^n \right] \left\{ \delta(\sigma) - m^2 \theta(-\sigma) \left[\frac{1}{2} + \frac{2m^2\sigma}{2^2 \cdot 4} + \right. \right. \\ & + \left. \frac{(2m^2\sigma)^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \dots \right] \Bigg\} = \frac{\Delta^{1/2}}{8\pi} \left\{ \delta(\sigma) - m^2 \theta(-\sigma) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} m^2 \sigma + \dots \right) + \right. \\ & + a_1 \theta(-\sigma) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} m^2 \sigma + \dots \right) - \\ & \left. - \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_2 \right) \sigma \theta(-\sigma) \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} m^2 \sigma + \dots \right) + \dots \right\}, \quad (211) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^{(1)}(x, x') \sim & \left(\frac{\Delta^{1/2}}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{\sigma} + m^2 \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) \left(1 + \frac{1}{4} m^2 \sigma + \dots \right) - \frac{1}{2} m^2 - \right. \right. \\ & - \frac{5}{16} m^4 \sigma - \dots - a_1 \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) \left(1 + \frac{1}{2} m^2 \sigma + \dots \right) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{2} m^2 \sigma - \dots \right] + \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_2 \right) \sigma \left[\left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) \times \right. \right. \\ & \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8} m^2 \sigma + \dots \right) - \frac{1}{4} - \dots \Bigg] + \dots + \\ & \left. + \frac{1}{2m^2} \left[\frac{1}{2} a_1^2 + a_2 + O(\sigma) \right] + \frac{1}{2m^4} \left[\frac{1}{6} a_1^3 + a_1 a_2 + a_3 + O(\sigma) \right] + \dots \right]. \quad (212) \end{aligned}$$

Несмотря на то что функция Грина \overline{G} вещественна, функция $G^{(1)}$ в общем случае таковой не является. Выражение (212) этот факт не отражает. Асимптотическое разложение по обратным степеням m^2 не может дать нам мнимую часть, которая отлична от нуля всякий раз, когда имеет место процесс рождения частиц.

6.10. Эффективный лагранжиан

Вернемся теперь к выражению (184), которое с помощью формализма Швингера может быть переписано в виде

$$\delta W = \frac{1}{4} \text{Sp} [g^{1/4} G^{(1)} g^{1/4} \delta(g^{-1/4} F g^{-1/4})]. \quad (213)$$

В силу проведенного выше анализа это выражение эквивалентно

$$\delta W = -\frac{1}{2} i \text{Sp} [g^{1/4} G g^{1/4} \delta(g^{-1/4} F g^{-1/4})] \quad (214)$$

при условии, что мы исключим добавки $i0$, которые появляются, когда G выражается как функция σ . Подставляя соотношение (194) в (214), мы получаем

$$\begin{aligned} \delta W &= \frac{1}{2} \text{Sp} \int_0^\infty \exp(i g^{-1/4} F g^{-1/4} s) \delta(g^{-1/4} F g^{-1/4}) ds = \\ &= -\frac{i}{2} \delta \text{Sp} \int_0^\infty s^{-1} \exp(i g^{-1/4} F g^{-1/4} s) ds = \delta \int L d^4 x, \end{aligned} \quad (215)$$

и, следовательно,

$$W = \int L d^4 x + \text{const}, \quad (216)$$

где пространственно-временной интеграл берется по множеству, заключенному между in- и out-областями, а функция L является *эффективным лагранжианом*, который определяется [см. (196) и (198)] выражением

$$\begin{aligned} L &= -\frac{i}{2} \int_0^\infty s^{-1} \langle x, s | x, 0 \rangle ds = \\ &= -(32 \pi^2)^{-1} g^{1/2} \int_0^\infty s^{-3} \exp[-im^2 s + \Omega(x, x, s)] ds + \end{aligned}$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

+ Члены, соответствующие множеству дополнительных геодезических (если такие есть). (217)

При получении последнего равенства были использованы следующие выражения для пределов при совпадении точек x и x'

$$\begin{aligned} \sigma \xrightarrow{x' \rightarrow x} 0, \quad \sigma_{;\mu} \xrightarrow{x' \rightarrow x} 0, \quad \sigma_{;\mu\nu} \xrightarrow{x' \rightarrow x} g_{\mu\nu}, \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^\mu \partial x'^\nu} \xrightarrow{x' \rightarrow x} -g_{\mu\nu}, \\ D \xrightarrow{x' \rightarrow x} g. \end{aligned} \quad (218)$$

Интеграл (217) расходится на нижнем пределе. Заметим, однако, что формально он представляет собой скалярную плотность, *построенную только на основе соображений о геометрии пространства-времени*. Это означает, что W , определяемая выражением (216), является геометрической величиной, инвариантной относительно преобразования координат. Если мы сможем найти инвариантный относительно преобразования координат и не зависящей от метрики метод выделения ее бесконечностей, то остаток W_{reg} будет автоматически давать некоторый сохраняющийся вклад в величину среднего от тензора напряжений:

$$2(\delta W_{\text{reg}} / \delta g_{\mu\nu})_{; \nu} = 0. \quad (219)$$

Это означает, что в силу дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют базисные функции, это среднее само по себе будет сохраняться.

6.11. Метод фонового поля.

Эквивалентность однопетлевого и ВКБ-приближений

Теперь, может быть, время объяснить, почему излагаемый здесь формализм называется "методом фонового поля". Ранее я отмечал, что этот метод годится для полей любого спина. *Это включает в себя и собственно гравитационное поле*. Геометрия, от которой зависит функция W , является тогда *классической фоновой геометрией*, а вклады в W типа тех, которые рассматриваются в настоящем разделе, определяются линейными флуктуациями около этой геометрии; они и заключают в себе квантовую теорию. Иногда ошибочно

считают, что метод фонового поля этим и исчерпывается, т.е. что он является *только* квантовой теорией линеаризованного поля на классическом фоне. На самом деле этот метод охватывает весь диапазон самодействий, соответствующих нелинейному характеру гравитационного поля. Вычисления настоящего раздела (или вернее, их эквиваленты для чистого гравитационного поля) дают нам только первое приближение для W , и, следовательно, для амплитуды перехода вакуум—вакуум. По существу это приближение совпадает с приближением ВКБ и иногда записывается путем включения классического действия в фазу амплитуды перехода, т.е. в виде

$$\langle \text{out, vac} | \text{in, vac} \rangle = e^{i(S + W)} \approx \frac{(\det G)^{\frac{1}{2}}}{(\det G_{\text{adv}})^{\frac{1}{2}}}_{\text{ret}} e^{iS}; \quad (220)$$

здесь константа Φ из соотношения (187) включена в S ¹⁾. Можно показать, что отношение двух детерминантов в этом выражении в точности совпадает с детерминантом Ван Флека — Моретта для классической траектории (истории), соответствующей фоновому полю.

По общепринятой терминологии приближение ВКБ в теории поля известно как *однопетлевое приближение*. Приближения более высокого порядка можно взаимно однозначно сопоставить с диаграммами, имеющими более чем одну замкнутую петлю, по обычному правилу. Единственное отличие от того, что принято в учебниках, заключается в том, что пропагатор, соответствующий внутренней линии, является пропагатором для искривленного, а не плоского пространства. Если рассматривать сразу несколько взаимодействующих полей, то соотношение (220) будет по-прежнему справедливо при условии, что фоновое поле комбинированное, а S и W являются соответственно *полным* действием и вакуумной поправкой. Хорошо известно, что функциональная производная n -го порядка от $S + W$ по фоновым полям равна полной вершинной функции n -го порядка для этой теории, а точная S -матрица получается с помощью замены S на $S + W$ и вычисления всех амплитуд только в приближении деревьев. Поскольку S -матрица наряду с рассеянием индивидуальных частиц определяет

¹⁾ Здесь S — функция действия для полного нелинейного гравитационного поля.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

в конечном счете и когерентное рассеяние (классических) волн большой амплитуды, то из этого следует, что именно $S + W$, а не S является эффективным функционалом даже для макроскопических полей. По этой причине предложение учесть в общей теории относительности реальные и виртуальные квантовые процессы с помощью представления уравнения Эйнштейна в виде¹⁾

$$G^{\mu\nu} = 8\pi < T^{\mu\nu} > \quad (221)$$

имеет не просто эвристическое обоснование, но оно *действительно правильно*. Для этого подхода существует модифицированная версия соотношения

$$\delta(S + W)/\delta g_{\mu\nu} = 0, \quad (222)$$

которая включает наряду с эффектами рождения реальных частиц часть W , соответствующую поляризации вакуума. По этой же причине является абсолютно правильным сокращение расходимостей W с помощью контрчленов из S . За исключением экстремальных значений энергий кривизны, когда у W появляется очень большая мнимая часть и процесс рождения частиц является таким интенсивным, что становится бессмысленным вопрос, действительно ли квазиклассическая концепция, воплощенная в уравнении (221), обеспечивает адекватное описание физики рассматриваемого явления.

6.12. Выделение расходимостей методом Швингера

Теперь давайте вернемся к расходимостям. Вначале я кратко опишу метод Швингера [43], чтобы впоследствии использовать его. Швингер начинает с вращения контура интегрирования в (217), чтобы совместить его с нижней частью мнимой оси, что эквивалентно замене $s = -it$. Функция Ω на мнимой оси вещественна. Следовательно, если у нее есть полюса в нижней половине плоскости, то они должны быть распределены симметрично в обоих квадрантах, и в процессе вращения контура будут выделяться вычеты от полюсов из правого квадранта. Эти вычеты будут, вообще говоря, давать вклады в мни-

¹⁾ Выражение $< T^{\mu\nu} >$ в правой части этого уравнения включает в себя вклады от гравитонов.

мую часть функции W , и, следовательно, полюса (или более сложные сингулярности, такие, как точки ветвления) должны появляться в этой части комплексной плоскости всякий раз, когда происходит рождение реальных частиц. Учитывая только вещественную часть эффективно-го лагранжиана, мы имеем

$$\operatorname{Re} L = (32 \pi^2)^{-1} g^{1/2} \int_0^\infty t^{-3} \exp[-m^2 t + \Omega(x, x, -it)] dt +$$

+ члены, возникающие от многократных геодезических. (223)

Мы видим, что бесконечности функции W связаны с $\operatorname{Re} W$.

Швингер выделяет бесконечности, просто разлагая функцию e^Ω в точке $t = 0$:

$$L_{\text{div}} = (32 \pi^2)^{-1} g^{1/2} \left\{ \int_0^\infty t^{-3} e^{-m^2 t} dt + a_1(x, x) \int_0^\infty t^{-2} e^{-m^2 t} dt + \right. \\ \left. + \left[\frac{1}{2} a_1^2(x, x) + a_2(x, x) \right] \int_0^\infty t^{-1} e^{-m^2 t} dt \right\}. \quad (224)$$

Коэффициенты при расходящихся интегралах можно определить прямым, но несколько утомительным способом: путем повторного ковариантного дифференцирования выражений (200), (201) и (205) и использования пределов при совпадении точек x и x' (218). Получаем

$$a_1(x, x) = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R, \quad (225)$$

$$a_2(x, x) = - \frac{1}{180} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{180} R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} + \frac{1}{6} \left(\frac{1}{5} - \xi \right) R_{;\mu}{}^\mu, \quad (226)$$

где $R_{\mu\nu\sigma\tau}$ и $R_{\mu\nu}$ — соответственно тензоры Римана и Риччи. Член вида ξR возникает из уравнения скалярного поля (150). Все другие члены возникают просто из-за некоммутативности ковариантного дифференцирования; следовательно, они представляют некоторый чисто геометрический вклад в расходимость. Сразу очевидно, что сокращение первых двух членов в выражении (224) внутри фигурных скобок с контрчленами из выражения для гравитационного действия эквивалентно перенормировке космологической и гравитационной констант. Третий член имеет вид, который не соответствует ни одному из членов, обычно включаемых в выражение для классического

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

действия. Члены этих трех типов, фигурирующие в выражении (224), хорошо известны всем специалистам по квантовой гравитации.

6.13. Связь метода Швингера с другими методами

Какая же связь между методом Швингера и методом Зельдовича и Старобинского? Последние ввели свой метод в рамках плоского трехмерного пространства, поэтому они могли выбрать импульсную переменную \mathbf{k} как индекс для рассматриваемых ими базисных функций. Технику регуляризации Зельдовичем и Старобинским тензора напряжений можно суммировать следующей формулой:

$$\langle T^{\mu\nu}(x) \rangle_{\text{reg}} = \int T^{\mu\nu}(\mathbf{k}, x) d^3\mathbf{k}, \quad (227)$$

где

$$T^{\mu\nu}_{\text{reg}}(\mathbf{k}, x) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ T^{\mu\nu}(u(m, \mathbf{k} | x), u^*(m, \mathbf{k} | x)) - \left[1 + \frac{\partial}{\partial(n^{-2})} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial(n^{-2})^2} \right] \frac{1}{n} T^{\mu\nu}(u(nm, n\mathbf{k} | x), u^*(nm, n\mathbf{k} | x)) \right\} \quad (228)$$

и явно указана зависимость базисных функций от затравочной массы m . Паркер и Фуллинг смогли показать, что эта формула эквивалентна методу "адиабатической регуляризации", который они в свою очередь смогли обобщить для приложения и в случае некоторого класса искривленных трехмерных пространств. В этом последнем методе каждый член в сумме по модам сравнивается с тем, каким он должен был быть, если бы темп временного изменения метрики замедлился бы и соответственно уменьшилась бы кривизна трехмерного пространства. Далее, проводится разложение по обратным степеням "параметра замедления", который измеряет это уменьшение, и первые три члена (порядков 0, -2 и -4) отбрасываются. Паркер и Фуллинг показали, что роль параметра замедления совпадает с той, которую играет в выражении (228) параметр n .

В случае геометрий, рассмотренных упомянутыми выше авторами, существует некоторая преимущественная система пространственных координат, и метод регуляризации зависит от них. Более того,

эта регуляризация проводится в каждой моде в отдельности. Какой аналогичный метод могли бы мы предложить в общем случае? Как мы должны поступить, когда нет очевидного разложения по модам? Ответ состоит в том, что необходимо раздвинуть точки, в которых определены полевые операторы, входящие в тензор $T^{\mu\nu}$. Бесконечности сразу исчезают (при условии, что раздвижка точек происходит не в световом направлении), и регуляризацию (228) можно проводить либо до, либо после интегрирования (227). Кроме того, на каждом шаге можно проводить преобразование подобия переменной \mathbf{k} . Тогда нетрудно видеть, что регуляризацию (228) также можно осуществить, оставляя \mathbf{k} неизменным; для этого $x - x'$ умножают на n^{-1} , а во втором члене в выражении (228) множитель n^{-1} заменяют на n^{-4} . Эта процедура немедленно переводится на ковариантный язык выражения (217). Нам необходимо только подставить член $i\sigma/2s$ в показатель подынтегрального выражения и записать (игнорируя члены, соответствующие многократным геодезическим)

$$L_{\text{reg}} = -\lim_{x' \rightarrow x} (32\pi^2)^{-1} g^{1/2} \int_0^\infty \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \left[\exp \left\{ i \left(\frac{\sigma}{2s} - m^2 s \right) + \Omega(s) \right\} - \left(1 + \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) \lambda^2 \exp \{ i(\lambda \sigma / 2s - m^2 s / \lambda) + \Omega(s) \} \right] ds, \quad (229)$$

причем вместо n^{-2} здесь введен символ λ . До тех пор пока σ отлична от нуля, осциллирующее поведение экспоненты препятствует расходимости интеграла на нижнем пределе. Более того, переменную s во втором члене в (229) можно подвергнуть преобразованию подобия $s \rightarrow \lambda s$, которое тогда приводит (229) к виду

$$L_{\text{reg}} = -\lim_{x' \rightarrow x} (32\pi^2)^{-1} g^{1/2} \int_0^\infty \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{s^3} \exp \left\{ i \left(\frac{\sigma}{2s} - m^2 s \right) \right\} \left[e^{\Omega(s)} - \left(1 + \frac{\partial}{\partial \lambda} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \right) e^{\Omega(\lambda s)} \right] ds = -(32\pi^2)^{-1} g^{1/2} \int_0^\infty \frac{1}{s^3} \times \\ \times \exp(-im^2 s) \left[e^{\Omega(s)} - 1 - ia_1 s + \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_2 \right) s^2 \right] ds = L - L_{\text{div}}. \quad (230)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Схема Зельдовича — Старобинского, обобщенная таким образом, дает, как видно, *в точности ту же регуляризацию, что и метод Швингера*. Швингер указал на то, что его схема, которую можно обобщить также на случай многопетлевых процессов (см. Боголюбов и Ширков [2]), годится для регуляризации и в других случаях при единственном условии, что интегрирование по параметру s (который он называет параметром "собственного времени") проводится в последнюю очередь. Он показал, что его схему можно рассматривать как некоторую разновидность наиболее полного обобщения метода Паули — Вилларса, и утверждает, что эта схема гарантирует сохранение любой (например, калибровочной) инвариантности, которая имеется в формальной теории. Как мы видели, она наверняка сохраняет общекоординатную инвариантность и, следовательно, гарантирует наличие сохранения (219). При всем при том остается вопрос, сохраняет ли эта схема конформную инвариантность.

6.14. Конформная инвариантность

Тензор напряжений, соответствующий полемому уравнению (150), определяется выражением

$$T^{\mu\nu} = g^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{2} (1 - 2\xi) [\varphi_{;\mu}^{\mu}, \varphi_{;\nu}^{\nu}]_+ + \left(2\xi - \frac{1}{2} \right) g^{\mu\nu} \varphi_{;\sigma} \varphi_{;\sigma}^{\sigma} - \right. \\ \left. - \xi [\varphi, \varphi_{;\mu}^{\mu\nu}]_+ + \xi g^{\mu\nu} [\varphi, \varphi_{;\sigma}^{\sigma}]_+ + \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \varphi^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} m^2 g^{\mu\nu} \varphi^2 \right\}. \quad (231)$$

В конформно-инвариантном случае массы, равной нулю (см. Каллан, Коулмен и Джакив [6]), это выражение сводится к

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{6} g^{\frac{1}{2}} \left\{ 2 [\varphi_{;\mu}^{\mu}, \varphi_{;\nu}^{\nu}]_+ - g^{\mu\nu} \varphi_{;\sigma} \varphi_{;\sigma}^{\sigma} - [\varphi, \varphi_{;\mu}^{\mu\nu}]_+ + \right. \\ \left. + g^{\mu\nu} [\varphi, \varphi_{;\sigma}^{\sigma}]_+ + \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) \varphi^2 \right\}, \quad (232)$$

которое в силу уравнений поля формально удовлетворяет равенству

$$T_{\mu}^{\mu} = 0. \quad (233)$$

Равенство (233) возникает также как следствие конформной инвариантности функционала действия для этого случая: S остается инвариантным при инфинитезимальных вариациях

$$\delta g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} \delta\lambda, \quad \delta\varphi = -\frac{1}{2}\varphi\delta\lambda, \quad (234)$$

где $\delta\lambda$ — произвольная инфинитезимальная скалярная функция. Если мы покажем, что функционал W также инвариантен при вариациях (234), то из этого будет следовать, что

$$g^{\mu\nu}(\delta W/\delta g_{\mu\nu}) = 0, \quad (235)$$

и, следовательно,

$$T_{\text{рег } \mu}^{\mu} = 0 \quad (236)$$

при условии, что расходящаяся часть, которая выделена из W , также конформно-инвариантна.

Конформную инвариантность W формально можно доказывать следующим образом: вначале убеждаются, что тензор Римана и его свертки преобразуются при вариациях (234) следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta R_{\mu\nu\sigma\tau} &= R_{\mu\nu\sigma\tau} \delta\lambda - \frac{1}{2}(g_{\mu\sigma} \delta\lambda_{;\nu\tau} + g_{\nu\tau} \delta\lambda_{;\mu\sigma} - g_{\mu\tau} \delta\lambda_{;\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} \delta\lambda_{;\mu\tau}), \\ \delta R_{\mu\nu} &= -\frac{1}{2}(2\delta\lambda_{;\mu\nu} + g_{\mu\nu} \delta\lambda_{;\sigma}^{\sigma}), \\ \delta R &= -R\delta\lambda - 3\delta\lambda_{;\mu}^{\mu}. \end{aligned} \quad (237)$$

Затем показывают, что оператор (191) имеет очень простой закон преобразования, если $m = 0$ и $\xi = 1/6$,

$$\delta(g^{-1/4} F g^{-1/4}) = -\frac{1}{2}[g^{-1/4} F g^{-1/4}, \delta\lambda]_+. \quad (238)$$

В силу того что

$$F G^{(1)} = 0, \quad G^{(1)} F = 0, \quad (239)$$

из соотношения (213) немедленно следует

$$\delta W = 0. \quad (240)$$

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

6.15. Тензор Вейля и обобщенные инварианты Гаусса – Боннэ

Единственный локальный геометрический конформный инвариант, который теперь можно построить из метрического тензора и его первых и вторых производных, — это величина $g^{1/2} C_{\mu\nu\sigma\tau} C^{\mu\nu\sigma\tau}$ (или функции от нее), где $C_{\mu\nu\sigma\tau}$ — тензор Вейля¹⁾:

$$C_{\mu\nu\sigma\tau} \equiv R_{\mu\nu\sigma\tau} - \frac{1}{2} (g_{\mu\sigma} R_{\nu\tau} + g_{\nu\tau} R_{\mu\sigma} - g_{\mu\tau} R_{\nu\sigma} - g_{\nu\sigma} R_{\mu\tau}) + \\ + \frac{1}{6} (g_{\mu\sigma} g_{\nu\tau} - g_{\mu\tau} g_{\nu\sigma}) R, \quad (241)$$

$$\delta C_{\mu\nu\sigma\tau} = C_{\mu\nu\sigma\tau} \delta\lambda. \quad (242)$$

Это означает, что единственный контрчлен, который можно было бы использовать для сокращения расходимостей в W и который в то же время сохранял бы конформную инвариантность теории, должен иметь вид

$$\text{const} \cdot \int g^{1/2} C_{\mu\nu\sigma\tau} C^{\mu\nu\sigma\tau} d^4x \equiv \text{const} \cdot \int g^{1/2} \left(R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} - 2R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \right. \\ \left. + \frac{1}{3} R^2 \right) d^4x. \quad (243)$$

Этот интеграл можно упростить, используя тот хорошо известный факт (см. Черн [11, 12]), что интеграл

$$\int g^{1/2} (R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) d^4x, \quad (244)$$

для любого четырехмерного многообразия является топологическим инвариантом, *не зависящем от геометрии*. (Он является аналогом хорошо известного инварианта Гаусса – Боннэ для двумерных многообразий.) Следовательно,

$$\text{const} \cdot \int g^{1/2} C_{\mu\nu\sigma\tau} C^{\mu\nu\sigma\tau} d^4x = \text{const} \cdot \int g^{1/2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) d^4x + \text{const}. \quad (245)$$

¹⁾ Тензор Вейля обращается в нуль, только если пространство-время конформно-плоское. Он также удовлетворяет условию $C_{\mu\sigma\nu}{}^\sigma \equiv 0$.

6.16. Явное нарушение конформной инвариантности
в методе Швингера. Преодоление этой трудности

Обращаясь к выражениям (224) – (226), мы видим, что три расходящихся члена, выделенные методом Швингера, в конформно-инвариантном случае принимают соответственно следующий вид:

$$\begin{aligned} & \text{const} \cdot \int g^{\frac{1}{2}} d^4 x, \\ & 0, \\ & \text{const} \cdot \int g^{\frac{1}{2}} (R_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu\sigma\tau} - R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R_{;\mu}^{\mu}) d^4 x = \text{const} \cdot \int g^{\frac{1}{2}} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) \times \\ & \times d^4 x + \text{const}. \end{aligned} \quad (246)$$

Последний из этих членов в точности совпадает с (245). Второй член равен нулю; следовательно, перенормировка гравитационной постоянной отсутствует. В то же время первый член, который перенормирует космологическую постоянную, *не* является конформно-инвариантным и *не* равен нулю. Что же нам делать с этим фактом?

Один из путей – воспользоваться методом размерной регуляризации (см. 'т Офт и Велтман [33]). В рамках этого метода космологический член автоматически обращается в нуль. Но это так только потому, что неявно предполагается некоторое специальное соглашение относительно аналитического продолжения на комплексные размерности. Нури-Могхадан и Тейлор [37] показали, что насколько это касается расходящихся членов, такое аналитическое продолжение внутренне противоречиво. Более того, этот метод в его настоящей форме можно использовать только для лоренц- или деситтер-инвариантных квазилинеаризованных теорий¹⁾.

Ясно, что необходим более прямой подход, причем лучше, если этот подход будет менее изощрен. Как всегда, сам по себе напрашивается метод раздвижки точек: если член $i\sigma/2s$ подставить в показатель экспоненты в подынтегральном выражении (217), то мы получим (пренебрегая поправками от многократных геодезических)

¹⁾ Распространение этого метода на произвольные фоновые геометрии представляло бы определенный интерес. Для кого-нибудь это может составить тему диссертации. Распространение на случай пространства-времени де Ситтера только недавно провели Канделас и Рэйни (частное сообщение).

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\begin{aligned}
 L &= -\lim_{x' \rightarrow x} \frac{D^{1/2}}{32\pi^2} \int_0^\infty \frac{1}{s^3} \exp \left\{ i \left(\frac{\sigma}{2s} - m^2 s \right) \right\} e^{\Omega(s)} ds = \\
 &= \lim_{x' \rightarrow x} i \frac{\partial}{\partial \sigma} [g^{1/4}(x) G(x, x') g^{1/4}(x')] = \quad [\text{см. (206)}] \\
 &= -\lim_{x' \rightarrow x} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \sigma} [g^{1/4}(x) G^{(1)}(x, x') g^{1/4}(x')] =
 \end{aligned}$$

(отбрасывая члены с $i0$)

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x' \rightarrow x} \frac{D^{1/2}}{8\pi^2} \left\{ \frac{1}{\sigma^2} - \frac{m^2}{2\sigma} - \frac{m^4}{4} \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) + \frac{3}{16} m^4 + \right. \\
 &+ a_1 \left[\frac{1}{2\sigma} + \frac{m^2}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) - \frac{1}{4} m^2 \right] - \\
 &\left. - \left(\frac{1}{2} a_1^2 + a_2 \right) \left[\frac{1}{2} \left(\gamma + \frac{1}{2} \ln |m^2 \sigma / 2| \right) - \frac{1}{4} \right] + \dots \right\}. \quad (247)
 \end{aligned}$$

В последнем равенстве, которое получается из соотношения (212), выписаны только те члены, которые имеют эквивалентные вклады в расходящемся лагранжиане (224). Первая строчка в фигурных скобках соответствует, очевидно, космологическому члену. Это единственный член, который остается в плоском пространстве-времени. Следовательно, он должен давать скалярный вариант тензора напряжений вакуума (31). Поучительно увидеть то, как это происходит. Пусть $\varepsilon^\mu = x^\mu - x'^\mu$ есть сдвиг координат. Когда точки x и x' близки друг к другу, можно записать $\sigma = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu$. Следовательно, когда $m = 0$, "космологическая" часть функции W принимает вид

$$W_{\text{cosm}} = \frac{1}{2\pi^2} \int g^{1/2} (g_{\mu\nu} \varepsilon^\mu \varepsilon^\nu)^{-2} d^4 x. \quad (248)$$

Выражение (248), зависящее, как это и должно быть, от системы координат, выделенной вектором ε^μ , не является координатно-инвариантным. Оно, однако, является *конформно-инвариантным* и дает вклад в $\langle T^{\mu\nu} \rangle$, имеющий нулевой след:

$$2 \frac{\delta W_{\text{cosm}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{g^{\frac{1}{2}}}{2\pi^2} [g^{\mu\nu} (g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \epsilon^\beta)^{-2} - 4\epsilon^\mu \epsilon^\nu (g_{\alpha\beta} \epsilon^\alpha \epsilon^\beta)^{-3}]. \quad (249)$$

В локальной системе координат Минковского при выборе $(\epsilon^\mu) = (\Lambda^{-1}, 0, 0, 0)$ выражение (249) совпадает с точностью до множителя 2, учитывающего степени свободы, с выражением (31). При использовании метода пространственного усреднения Фуллингa и Паркера [25], который дает альтернативный способ регуляризации, действительно получается равенство $(\epsilon^\mu \epsilon^\nu) = \text{diag}(0, \frac{1}{2} \Lambda^{-2}, \frac{1}{2} \Lambda^{-2}, \frac{1}{2} \Lambda^{-2})$, которое приводит к выражению, отличному от (31) на множитель $-1/6$.

Урок, который можно из этого извлечь, заключается в следующем: рассматривая расходящиеся части W , необходимо использовать различные процедуры в зависимости от того, что мы хотим (формально) подчеркнуть — координатную инвариантность или конформную инвариантность. В любом случае конечная часть, W_{reg} , которая остается после применения метода Швингера, когда бесконечности вычтены, является одновременно и координатно-инвариантной и конформно-инвариантной. Явные вычисления [13] показывают, что аналогичные результаты имеют место для безмассового поля спина 1/2 и электромагнитного поля, которые оба являются конформно-инвариантными. В каждом случае гравитационная постоянная остается неперенормированной, а логарифмически расходящаяся часть W принимает вид (245). Единственное достойное внимания различие между фермионным и бозонным случаями состоит в том, что соответствующие космологические члены имеют противоположные знаки¹⁾. Следует упомянуть, что для получения этих результатов в электромагнитном случае необходимо включить вклады от фиктивных квантов, формальное присутствие которых необходимо для сохранения калибровочной инвариантности (см. де Витт [20]). При проведении вычислений в пространстве Минковского (например, в случае стандартной квантовой электродинамики) эти кванты можно полностью игнорировать.

¹⁾ Это общее правило для фермионных полей по отношению к бозонным. Зумино [54] показал, что в суперсимметричной теории сумма всех вкладов в космологический член как следствие этого правила равна нулю. Результат Зумино имеет место во всех порядках по суперсимметричным взаимодействиям.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

6.17. Рождение частиц и напряжение вакуума в конформно-плоском пространстве-времени

Фуллинг, Паркер и Ху [26] рассмотрели конформно-инвариантное скалярное поле в космологических моделях типа Казнера и Робертсона — Уолкера. Их анализ тензора напряжений в этих моделях подтверждает факт, ранее замеченный Паркером [38], а именно во вселенных Робертсона — Уолкера нет рождения конформно-инвариантных безмассовых квантов. Формально этот результат можно понять как следствие уравнения (240). Каждая вселенная Робертсона — Уолкера конформно эквивалентна некоторой вселенной Эйнштейна с постоянным радиусом. Следовательно, величина W для них обеих должна быть одинакова. Но вселенная Эйнштейна является статической. Следовательно, для обеих $\text{Im } W = 0$ (нет рождения частиц).

Фуллинг, Паркер и Ху настаивают, однако, на утверждении, что в этих вселенных тензор напряжений, т.е. $2\delta W/\delta g_{\mu\nu}$ сам по себе равен нулю. Это утверждение могло бы следовать из того факта, что эти вселенные конформно-плоские, а когда $R_{\mu\nu\sigma\tau} = 0$, ожидают, что и $W_{\text{reg}} = 0$. Однако на самом деле W_{reg} *нельзя предполагать равным нулю только из-за того, что пространство-время плоское*. Рассмотрим, например, статическую плоскую вселенную, для которой трехмерное пространство имеет топологию $R^2 \times S^1$. Сам анализ напряжений вакуума в этой вселенной почти полностью совпадает с анализом эффекта Казимира. Напряжение вакуума не равно нулю и зависит от длины окружности S^1 -цикла. В этом случае, однако, можно провести параллель, внося необходимые изменения, с детальными рассуждениями и аргументами упомянутых выше авторов, причем вывод будет противоположным. Таким образом, их выводы в случае, когда трехмерное пространство имеет топологию S^3 , также необходимо рассматривать с некоторым сомнением¹⁾. В общем случае W_{reg} можно благополучно считать равным нулю только тогда, когда пространство-время конформно-плоское, асимптотически-плоское и гомеоморфно пространству Минковского.

¹⁾ Дополнение автора при корректуре английского издания. Ларри Форд и Я. Зельдович (частное сообщение) в этом случае показали недавно, что в локальной "покоящейся" системе координат $\langle T^{\mu\nu}_{\text{reg}} \rangle = (\hbar c/480 \pi^2 R^4) \text{diag} (1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, где R — радиус вселенной.

6.18. Инфракрасная проблема

Необходимо упомянуть об инфракрасной проблеме, которая возникает при $m = 0$. Когда $m \neq 0$, интегралы в фигурных скобках в выражении (224) расходятся только на нижнем пределе. Это соответствует ультрафиолетовому пределу $\Lambda \rightarrow \infty$. Однако когда $m = 0$, третий из интегралов расходится также и на верхнем пределе. Это инфракрасная расходимость. Как было указано Фуллингем и Паркером [25], эту расходимость не следует включать в L_{div} , в противном случае соответствующая расходимость должна быть включена и в W_{reg} . То, что необходимо сделать в этом случае, — это ввести обрезание сверху, равное T . Значение величины T произвольно. Если мы заменим T на T' , результат будет эквивалентен изменению перенормированного лагранжиана для классического гравитационного поля на величину, равную

$$\Delta L_{\text{ren}} = (32 \pi^2)^{-1} \ln(T'/T) g^{1/2} \left[\frac{1}{2} a_1^2(x, x) + a_2(x, x) \right]. \quad (250)$$

В конформно-инвариантном случае это соответствует изменению перенормированного классического действия, которое дается выражением

$$\Delta S_{\text{ren}} = \frac{\ln(T'/T)}{1920 \pi^2} \int g^{1/2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) d^4x = -\Delta W_{\text{reg}}. \quad (251)$$

То, что мы делаем здесь, — это не что иное, как представление $S + W$ в виде

$$S + W = S_{\text{ren}} + W_{\text{red}}, \quad (252)$$

а затем перемещение интегралов вида (251) произвольно туда и обратно между S_{ren} и W_{reg} . Функционал S_{ren} должен быть определен из эксперимента. Произвольность (251) означает, что S_{ren} не может быть взята просто в традиционной классической форме $(16\pi)^{-1} \int g^{1/2} R d^4x$ (с $G = 1$), а необходимо предположить, что она имеет вид¹⁾

$$S_{\text{ren}} = (16\pi)^{-1} \int g^{1/2} R d^4x + (16\pi)^{-1} \int g^{1/2} \left(R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^2 \right) d^4x. \quad (253)$$

¹⁾ Предполагается, что перенормированная космологическая константа равна нулю.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Экспериментальная теория относительности неполна до тех пор, пока не определена величина константы μ , соответствующей ранее выбранному обрезанию T . Нижняя граница на величину μ может быть получена путем анализа небесной механики Солнечной системы. Второй член в выражении (253) приводит к некоторым поправкам к движению планет, эти поправки имеют порядок $e^{-\mu r}$, где r — расстояние от Солнца. Наибольшая поправка имеет место в случае Меркурия, для которого $r \sim 2 \cdot 10^{45}$ в абсолютных единицах. Принимая во внимание то, что движение планет, как известно, согласуется с выбором $\mu = 0$ с точностью где-то между 10^{-8} и 10^{-10} (конечный результат не очень чувствителен к точной величине), мы получаем $\mu \geq 2 \cdot 10^{-44}$ в абсолютных единицах. Следовательно, если даже коэффициент перед вторым интегралом в выражении (253) велик и имеет порядок 10^{85} , этот член не может заметно влиять на планетарную астрономию. Обрезание T соответствует максимальной длине волны порядка $T^{1/2}$. Если рассматривать в качестве гравитационного источника Солнце, то естественный максимум соответствует радиусу Солнца ($\sim 10^{44}$ в абсолютных единицах). Но даже если предположить просто, что максимальная длина волны лежит где-то между радиусом протона ($\sim 10^{20}$) и радиусом вселенной ($\sim 10^{62}$), то соответствующая неопределенность в $S_{\text{ген}}$ [см. (251)] дает на уровне солнечной системы совершенно пренебрежимый вклад в член с μ^2 .

В безмассовом конформно-неинвариантном случае инфракрасная ситуация несколько иная. В этом случае (который включает квантованное гравитационное поле) скаляр $a_1(x, x)$ не равен нулю тождественно. Вместо этого он играет роль, аналогичную m^2 в интеграле (217), и может обеспечить естественное инфракрасное обрезание. В эффективном лагранжиане L он приводит к членам вида $a_2 \ln |R|$. Члены, аналогичные этому, но не являющиеся полностью ковариантными, обнаружили Фуллинг и Паркер [25] и Гинзбург, Киржниц и Любушин [29].

В случае $m \neq 0$ процесс перенормировки более прямой. Необходимо просто убрать из эффективного лагранжиана L все члены, появляющиеся в (247). Оставшиеся невыписанные члены, начинающиеся с члена $m^{-2}(\frac{1}{6}a_1^3 + a_1a_2 + a_3)$, конечны и ковариантны. Они аналогичны поправкам Улинга и Эйлера — Гейзенберга к максвелловскому лагранжиану в квантовой электродинамике. Будучи членами, которые являются асимптотическим разложением по обратным степеням m^2 , они

могут в лучшем случае давать только некоторое приближение к W_{reg} . Это приближение будет хорошим при условии, что компоненты тензора Римана в квазистационарной ортонормированной системе координат малы по сравнению с m^2 . Тогда приближенное выражение для $\langle T_{\text{reg}}^{\mu\nu} \rangle$ можно получить с помощью функционального дифференцирования.

6.19. Выделение расходимостей при суммировании по модам методом раздвижки точек

Когда компоненты тензора Римана не малы по сравнению с m^2 или когда $m = 0$, для вычисления $\langle T_{\text{reg}}^{\mu\nu} \rangle$ необходимо прибегнуть к помощи других методов. Обычно это включает в себя прямое выделение бесконечностей из суммы по модам (12). Поскольку базисные функции в сумме по модам можно вычислить только для очень ограниченного класса геометрий, то в общем случае невозможно вычислить $\langle T_{\text{reg}}^{\mu\nu} \rangle$, беря функциональные производные от W_{reg} по метрике. Следовательно, большая часть формального аппарата настоящего раздела могла бы оказаться не очень полезной. К счастью, это не так. Существует прямой путь *ковариантно* идентифицировать расходящиеся части $\langle T^{\mu\nu} \rangle$; этот метод годится для любой геометрии, ограничена она или нет.

Метод основан на том замечании, что в силу уравнений (174), (183) и (231) можно записать

$$2g^{-1/2} \frac{\delta W}{\delta g_{\mu\nu}} = \lim_{x' \rightarrow x} \left[\frac{1}{2} (1 - 2\xi) G^{(1)\mu\nu'}_{; ;} + \left(\xi - \frac{1}{4} \right) g^{\mu\nu} G^{(1)\sigma'}_{; ;\sigma} - \right. \\ \left. - \xi G^{(1)\mu'}_{; ;\nu'} + \xi g^{\mu\nu} G^{(1)\sigma'}_{; ;\sigma'} + \frac{1}{2} \xi \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R \right) G^{(1)} - \right. \\ \left. - \frac{1}{4} m^2 g^{\mu\nu} G^{(1)} \right]. \quad (254)$$

Следовательно, выражение (212) можно подставить в (254), провести указанные дифференцирования, положить $\sigma^\mu_{; ; ;} = -\sigma^\mu_{; ; ;} = \varepsilon^\mu$ и продолжить далее так же, как при анализе выражения (249). Но прежде чем делать это, необходимо заменить $\Delta^{1/2}$ и a_1 в выражении (212) их разложениями

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

$$\Delta^{\frac{1}{2}}(x, x') = 1 + \frac{1}{12} R_{\mu\nu} \sigma^{\mu} \sigma^{\nu} - \frac{1}{24} R_{\mu\nu; \sigma} \sigma^{\mu} \sigma^{\nu} \sigma^{\sigma} + \left(\frac{1}{288} R_{\mu\nu} R_{\sigma\tau} + \right. \\ \left. + \frac{1}{360} R^{\alpha}{}_{\mu}{}^{\beta}{}_{\nu} R_{\alpha\sigma\beta\tau} + \frac{1}{80} R_{\mu\nu; \sigma\tau} \right) \sigma^{\mu} \sigma^{\nu} \sigma^{\sigma} \sigma^{\tau} + \dots, \quad (255)$$

$$a_1(x, x') = \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{6} - \xi \right) R_{; \mu} \sigma^{\mu} + \left[-\frac{1}{90} R_{\mu\alpha} R_{\nu}^{\alpha} + \right. \\ \left. + \frac{1}{180} R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + \frac{1}{180} R_{\alpha\beta\gamma\mu} R^{\alpha\beta\gamma}{}_{\nu} + \frac{1}{120} R_{\mu\nu; \alpha}^{\alpha} + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{40} - \frac{1}{6} \xi \right) R_{; \mu\nu} \right] \sigma^{\mu} \sigma^{\nu} + \dots, \quad (256)$$

которые могут быть получены методом, использованным для получения выражений (225) и (226). Затем, после дифференцирования, необходимо воспользоваться разложениями

$$\sigma_{; \mu}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} - \frac{1}{3} R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \sigma^{\alpha} \sigma^{\beta} + \dots, \quad (257)$$

$$\sigma_{; \mu}^{\mu\nu'} = -g^{\mu\nu} - \frac{1}{6} R^{\mu}{}_{\alpha}{}^{\nu}{}_{\beta} \sigma^{\alpha} \sigma^{\beta} + \dots, \quad (258)$$

которые выводятся аналогично.

Получающееся выражение будет приведено в другом месте в связи с исследованием тензора напряжений вблизи черной дыры. Оно является и сложным и (из-за большого числа векторов ϵ^{μ} , которые в нем появляются) очень сильно зависит от системы координат. Однако зависимость от системы координат полностью связана с членами, не зависящими от тензора Римана, членами, линейными по тензору Римана или его первой и второй ковариантным производным, и членами, квадратичными по тензору Римана. Это именно те члены, которые появляются из W_{div} . Если все эти члены сложить вместе, результат будет равен $2g^{-\frac{1}{2}} \delta W_{\text{div}} / \delta g_{\mu\nu}$. Когда геометрия задана *априори*, покомпонентная оценка этих членов проводится прямо. Более того, не возникает никаких особых трудностей при выборе подходящего вектора ϵ^{μ} , раздвигающего точки, для использования его как в этих чле-

нах, так и при суммировании по модам (12). Таким образом, выражение, найденное для $2\delta W_{\text{div}}/\delta g_{\mu\nu}$, можно покомпонентно вычесть из сумм по модам. Вычитание проводится в любой удобной системе координат. Результат будет не зависящим от векторов ϵ^μ и ковариантным.

Большинство членов выражения $2\delta W_{\text{div}}/\delta g_{\mu\nu}$, зависящих от вектора ϵ^μ , конечны и, следовательно, аналогичны странным "нетензорным" членам, обнаруженным Фуллингом и Паркером [25]. Очень легко убедиться в возможности установить соответствие между членами, найденными этими двумя методами и, следовательно, разрешить трудность, которую до сих пор представляют эти члены. В методе регуляризации, отвечающем этим двум случаям, имеются, однако, и некоторые различия, на которые следует обратить внимание. Фуллинг и Паркер используют импульсное обрезание, в то время как принятый здесь метод раздвижки точек соответствует (по крайней мере для раздвижки во времениподобном направлении) обрезанию энергии. Если эти два обрезания обозначить соответственно через K и Λ , то они будут связаны соотношением $\Lambda^2 = K^2 + m^2$. Это может объяснить, почему зависящие от вектора ϵ^μ члены, обнаруженные в настоящем подходе, включают в себя степени m не выше четвертой, в то время как Фуллинг и Паркер получают также члены m^6 и m^8 .

6.20. Взгляд в будущее

Теперь после более или менее контролируемого вычисления вкладов от однопетлевых процессов можно спросить, что случится, если попытаться учесть многопетлевые процессы. Такие вычисления в первую очередь чрезвычайно сложны. Это потому, что когда после учета многопетлевых вкладов переходят к классическому гравитационному действию, то оказывается, что для согласованности необходимо включить в рассмотрение гравитоны, а сложность гравитон-гравитонных вершинных частей такова, что даже смелого человека это заставляет дрогнуть. Правда, существует более фундаментальная проблема, которая вызывает наиболее решительное разногласие в квантовой теории гравитации. Дело в том, что по стандартным критериям эта теория неперенормируемая. Амплитуда, или матричные элементы, которые включают в себя более чем одну петлю, являются более расходящимися, чем те, которые учитывают только однопетлевые вклады.

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

Чтобы избавиться от этих бесконечностей, необходимо учесть дополнительные контрчлены, причем их сложность возрастает. Для избавления от логарифмических расходимостей в однопетлевом случае использовать контрчлен вида (246) уже опасно. Этот член в классическом действии приводит к уравнениям поля четвертого порядка по производным и соответственно ко всем "духовым" трудностям, связанным с этими уравнениями.

"Больные места" сводятся к следующему. После Эйнштейна физики стали верить в кривизну пространства-времени. Кривизна уже в приближении ВКБ (однократные замкнутые петли) приводит к неприятным расходимостям. Тем не менее приближение ВКБ *более или менее* надежно — взять хотя бы эффект Казимира, а он был измерен в лаборатории. В то же время нельзя считать, что приближение ВКБ — последнее слово теории. Это только некоторое приближение.

Может быть, что в квантовой гравитации, как многие предполагали, имеется свой собственный параметр обрезания и что он на самом деле конечен. Были предприняты героические усилия, чтобы доказать это путем суммирования бесконечных классов многопетлевых амплитуд. К сожалению, эти попытки до сих пор остаются и сомнительными и, в конце концов, зависящими от системы координат (зависящими от калибровки). В настоящее время, даже если игнорировать вычислительные трудности, только две возможные процедуры кажутся пригодными. Первая: согласимся с бесконечностями в каждом порядке, как они есть, но всех их точно уничтожим контрчленами, оставленными для классического члена $\int g^{1/2} R d^4 x$ [с модификацией, содержащейся в соотношениях (251) и (253), для случая $m = 0$]. Вторая: будем рассматривать перенормированный гравитационный пропагатор, полученный в приближении ВКБ как пропагатор нулевого порядка, и используем *его* во внутренних линиях всех многопетлевых диаграмм. Поскольку на малых расстояниях этот пропагатор ведет себя менее сингулярно, чем "затравочный" пропагатор, то оказывается, что все амплитуды более высокого порядка будут расходиться не сильнее, чем квадратично по параметру энергетического обрезания Λ . Действительно ли один из двух методов имеет определенный смысл, предстоит определить в будущем.

Последнее замечание касается использования in- и out-областей. К настоящему моменту должно быть ясно, что расходимости (по

крайней мере в приближении ВКБ) зависят от геометрии пространства-времени только локально. Они включают в себя лишь метрический тензор и его четыре первых производных. Неважно, где in- и out-области локализованы, и неважно, каких они размеров: вид расходимостей всегда остается одним и тем же. Следовательно, ничего не произойдет, если эти области просто исчезнут. Конечно, при полном отсутствии векторов Киллинга могут возникнуть трудности при построении некоторого имеющего смысл или удобного пространства вектора состояний. Однако введенные здесь вычитания должны служить для регуляризации любого матричного элемента для тензора $T^{\mu\nu}$ независимо от того, как определены состояния.

Я хочу выразить свою признательность профессору Дэннису Шьяме за гостеприимство, оказанное мне астрофизическим факультетом Оксфордского университета, где эта работа была начата. Я получил пользу от дискуссий со многими коллегами, но в особенности с Ларри Фордом, Стивеном Фуллингом, Гэри Гиббонсом, Стивеном Хокингом, Кристофером Айшемом и Вильямом Унру.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bekenstein J.D.*, Phys. Rev., **D7**, 2333 (1973).
2. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.*, Введение в теорию квантованных полей, "Наука", 1975.
3. *Boulware D.G.*, 1975 (работа находится в стадии подготовки).
4. *Boyer T.H.*, Phys. Rev., **174**, 1764 (1968).
5. *Boyer T.H.*, Phys. Rev., **185**, 2039 (1969).
6. *Callan C.G., Coleman S., Jackiw R.*, Ann. Phys. (N.Y.), **59**, 42 (1970).
7. *Capper D.M., Ramón-Medrano M.*, Phys. Rev., **D9**, 1641 (1974).
8. *Capper D.M., Leibbrandt G., Ramón-Medrano M.*, Phys. Rev., **D8**, 4320 (1974).
9. *Capper D.M., Duff M.J., Halpern L.*, Phys. Rev., **D10**, 461 (1974).
10. *Casimir H.B.G.*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wetenschap., **51**, 793 (1948). [См. также *Boyer T.H.*, Ann. Phys., (N.Y.), **56**, 474 (1970).]
11. *Chern S.S.*, Hamburg. Abh., **20**, 117 (1955).
12. *Chern S.S.*, Journ. Soc. Indust. Appl. Math., **10**, 751 (1962).
13. *Christensen S.*, 1974, частное сообщение (будет опубликовано).
14. *Christodoulou D.*, Phys. Rev. Lett., **25**, 1596 (1970).
15. *Christodoulou D., Ruffini R.*, Phys. Rev., **D4**, 3552 (1971).
16. *Damour T., Ruffini R.*, Quantum Electrodynamical Effects in Kerr-Newman Geometries, Princeton preprint, 1974.
17. *Davies B.*, Journ. Math. Phys., **13**, 1324 (1972).

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

18. Deser S., Van Nieuwenhuizen P., Phys. Rev., D10, 401, 411 (1974).
19. DeWitt B.S., Dynamical Theory of Groups and Fields, Gordon and Breach, Inc., New York, 1965.
20. DeWitt B.S., Phys. Rev., 162, 1195, 1239 (1967).
21. Dowker J.S., Journ. Phys. (London), A3, 451 (1970).
22. Dowker J.S., Ann. Phys. (N.Y.), 62, 361 (1971).
23. Ford L., Ph.D. thesis, Princeton University, 1974.
24. Fulling S.A., Phys. Rev., D7, 2850 (1973).
25. Fulling S.A., Parker L., 1974, Ann. Phys. (N.Y.), 87, 176 (1974).
26. Fulling S.A., Parker L., Hu B.L., Conformal Energy-Momentum Tensor in Curved Spacetime: Adiabatic Regularization and Renormalization, University of Wisconsin-Milwaukee preprint, 1974.
27. Gerlach U.H., The Mechanism of Black Body Radiation from an Incipient Black Hole, Ohio State University preprint, 1974.
28. Gibbons G.W., Vacuum Polarization and the Spontaneous Loss of Charge by Black Holes, University of Cambridge preprint (1974) (будет опубликовано).
29. Гинзбург В.Л., Киржниц Д.А., Любушин А.А., ЖЭТФ, 60, 451 (1971).
30. Hawking S.W., Phys. Rev. Lett., 26, 1344 (1971). (См. также Hawking S.W., Ellis G.F.R., The Large Scale Structure of Space-time, Cambridge University Press, 1973.)
31. Hawking S.W., Nature, 248, 30 (1974).
32. Hawking S.W., Particle Creation by Black Holes, University of Cambridge, preprint, 1974; Commun. Math. Phys., 43, 199 (1975).
33. 't Hooft G., Veltmann M., One Loop Divergences in the Theory of Gravitation, CERN Preprint TH 1723 (1974), Annales de l'Institut Henri Poincaré.
34. Misner C.W., 1972, частное сообщение Прессу и Тюкольски. [См. Press W., Teukolsky S., Nature, 238, 211 (1972); Bekenstein J., Phys. Rev., D7, 949 (1973).]
35. Moore G.T., Journ. Math. Phys., 11, 2679 (1970).
36. Morette C., Phys. Rev., 81, 848 (1951).
37. Nouri-Moghadan M., Taylor J.G., The Ambiguities of Dimensional Regularization Scheme, King's College London preprint, 1974.
38. Parker L., Phys. Rev., 183, 1057 (1969).
39. Parker L., Fulling S.A., Phys. Rev., D9, 341 (1974).
40. Peierls R.E., Proc. Roy. Soc. (London), A214, 143 (1952).
41. Penrose R., Nuovo Cimento, 1, special number (1969), 252.
42. Rindler W., Am. Journ. Phys., 34, 1174 (1966).
43. Schwinger J.S., Phys. Rev., 82, 664 (1951).
44. Schwinger J.S., Phys. Rev., 93, 615 (1954).
45. Старобинский А.А., ЖЭТФ, 64, 48 (1973).
46. Старобинский А.А., Чурипов С.М., ЖЭТФ, 65, 3 (1973).
47. Unruh W.G., Second Quantization in the Kerr Metric, University of California preprint, 1974 (будет опубликовано).

48. *Utiyama R., DeWitt B.S.*, Journ. Math. Phys., **3**, 608 (1962).
49. *Van Vleck J.H.*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **14**, 178 (1928).
50. Зельдович Я.Б., Письма ЖЭТФ, **14**, 270 (1971).
51. Зельдович Я.Б., ЖЭТФ, **62**, 2076 (1972).
52. Зельдович Я.Б., Старобинский А.А., ЖЭТФ, **61**, 2161 (1971).
53. Зельдович Я.Б., Лукаш В.Н., Старобинский А.А., Particle Creation in Gravitational Fields and Its Influence on Cosmological Expansion, препринт № 23, 1974, Институт прикладной математики АН СССР, М.
54. *Zumino B.*, Supersymmetry and the Vacuum, CERN preprint No. TH-1942, 1974.

Статья 3

Нарушение детерминированности при гравитационном коллапсе*

С.В. Хокин

Hawking S.W., Phys. Rev., D14, 2460 (1976)*

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Принцип эквивалентности, который утверждает, что гравитация взаимодействует с тензором энергии-импульса материи, и квантовомеханическое требование, что энергия должна быть положительной, приводят к тому, что гравитация всегда действует притягивающе. Это приводит к сингулярностям в любой правдоподобной теории гравитации. Сингулярность — это место, где разрушается классическая концепция пространства и времени так же, как и все известные законы физики, поскольку все они формулируются на основе классического пространства-времени. В настоящей статье утверждается, что это нарушение не просто результат нашего незнания правильной теории, но что оно приводит к фундаментальному ограничению нашей способности предсказывать будущее, ограничению, которое аналогично, но дополнительно к ограничению, накладываемому обычным квантовомеханическим принципом неопределенности. Это новое ограничение возникает потому, что общая теория относительности позволяет причинной структуре пространства-времени быть весьма отличной от структуры пространства Минковского. Область, где происходит взаимодействие, может быть ограничена не только начальной поверхностью, на которой заданы начальные данные, и конечной поверхностью, на которой

* Работа частично финансировалась Национальной организацией содействия развитию науки (США), договор № MPS 75-01398, Калифорнийский технологический институт.

** Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England; California Institute of Technology, Pasadena, California 91125.

©1976 by the American Physical Society.

©Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

производятся измерения, но также "скрытой поверхностью", о которой наблюдатель имеет только ограниченную информацию, такую, как масса, угловой момент и заряд. Относительно этой скрытой поверхности имеется "принцип игнорантности": поверхность излучает с равной вероятностью все конфигурации частиц, совместные с ограниченной наблюдаемой информацией. Показано, что принцип игнорантности справедлив при квантовомеханическом испарении черных дыр: черная дыра рождает частицы парами, причем всегда одна частица падает в дыру, а другая, возможно, улетает на бесконечность. Поскольку часть информации относительно состояния системы пропадает в дыре, конечная ситуация лучше описывается матрицей плотности, а не чистым квантовым состоянием. Это значит, что не существует S -матрицы для описания процесса образования и испарения черной дыры. Вместо этого вводится новый оператор, названный оператором суперрассеяния, который отображает матрицы плотности, описывающие начальную ситуацию, в матрицы плотности, описывающие конечную ситуацию.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гравитация намного слабее всех взаимодействий, известных физикам: гравитационные силы относятся к электрическим, действующим между двумя электронами, примерно как 1 к 10^{43} . На самом деле, гравитация так слаба, что она была бы ненаблюдаема вовсе, если бы не выделялась среди всех других взаимодействий свойством, известным как принцип универсальности или эквивалентности: гравитация влияет на траектории всех свободно движущихся частиц одинаково. Это было проверено экспериментально с точностью порядка 10^{-11} Роллом, Кротковым и Дикке [1] и Брагинским и Пановым [2]. Математически принцип эквивалентности выражается утверждением, что гравитация взаимодействует с тензором энергии-импульса материи. Это и обычное требование из квантовой теории, что локальная плотность энергии должна быть положительной, приводят к тому, что гравитация действует всегда притягивающе. Поэтому гравитационные поля всех частиц при больших концентрациях материи складываются и могут превосходить все другие силы. Как было предсказано общей теорией относительности и проверено экспериментально, универсальность гравитации распространяется и на свет. Достаточно высокая концентрация массы может поэтому привести к такому сильному гра-

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

витационному полю, из которого свет не сможет вырваться. Согласно специальной теории относительности, вырваться оттуда не сможет вообще ничто, потому что ничто не может распространяться быстрее света. Таким образом, имеется ситуация, когда некоторое количество материи запирается в области, граница которой за конечное время сжимается до нуля. Что-то, очевидно, здесь не так. На самом деле, как было показано в серии статей Пенроуза и автора [3 – 6], при таких обстоятельствах пространственно-временная сингулярность неотвратима, если предположить, что справедлива общая теория относительности и что тензор энергии-импульса материи удовлетворяет некоторому неравенству положительной определенности.

Возникновение сингулярностей было предсказано в двух областях. Во-первых, в прошлом, в начале существующего в настоящее время расширения вселенной. Этот момент понимается как "большой взрыв" и, вообще говоря, считается началом вселенной. Вторая область, в которой предсказаны сингулярности, это коллапс изолированных областей с высокой концентрацией массы, таких, как выгоревшие звезды.

Сингулярность может рассматриваться как место, где имеется нарушение классической концепции пространства-времени как многообразия с псевдоримановой метрикой. Поскольку все известные законы физики формулируются на основе классического пространства-времени, все они рушатся в сингулярности. Это большой кризис для физики, потому что это значит, что невозможно предсказание будущего: неизвестно, что будет выходить из сингулярности.

Многие физики очень неохотно соглашались с тем, что физика рушится в сингулярностях. Поэтому были сделаны следующие попытки для того, чтобы попытаться избежать этого заключения.

1. *Общая теория относительности не предсказывает сингулярностей.* Это мнение одно время было широко распространено (см., например, статью Лифшица и Халатникова [8]). Оно было, однако, оставлено после открытия теорем о сингулярностях, отмеченных выше, и в настоящее время большинство признает, что классическая общая теория относительности в самом деле предсказывает сингулярности (Лифшиц и Халатников [9]).

2. *Модификация общей теории относительности.* Для того чтобы предотвратить сингулярности, модификации должны быть такими, чтобы сделать гравитацию отталкивающей при некоторых обстоятельствах. Простейшая жизнеспособная модификация – это, вероятно, тео-

рия Бранса — Дикке [10]. В этой теории, однако, гравитация всегда притягивающая, так что теория предсказывает сингулярности, точно так же, как и общая теория относительности [7]. Теория Эйнштейна — Картана [11] включает спин-спиновое взаимодействие, которое может быть отталкивающим. Это может препятствовать сингулярностям в некоторых случаях, но существуют ситуации (такие, как чисто гравитационное или электромагнитное поля), в которых сингулярности все еще будут возникать. Большинство других модификаций общей теории относительности представляются или находящимися в конфликте с наблюдениями, или имеющими нежелательные свойства типа отрицательной энергии или уравнений четвертого порядка.

3. *Гипотеза "космической цензуры": природа питает отвращение к голой сингулярности.* Другими словами, если начинать с первоначально несингулярной асимптотически плоской ситуации, любая сингулярность, которая в дальнейшем появится вследствие гравитационного коллапса, будет скрыта от наблюдателя на бесконечности за горизонтом событий. Эта гипотеза, хотя она и не доказана, вероятно, верна для классической общей теории относительности при соответствующем определении нетривиальной сингулярности, для того чтобы исключить такие случаи, как мировые линии материи без давления, пересекающиеся на каустиках. Если гипотеза космической цензуры имеет место, можно было бы доказывать, что возможно игнорировать крушение физики в пространственно-временных сингулярностях, потому что это никогда не могло бы вызвать никакого регистрируемого эффекта для наблюдателя, достаточно осторожного, чтобы не упасть в черную дыру. Это довольно эгоистичная позиция, потому что она игнорирует вопрос о том, что происходит с наблюдателем, который падает через горизонт событий. Это также не решает проблему с сингулярностью большого взрыва, которая определенно голая. Однако окончательным ударом по этой попытке избежать дискуссии о кризисе в сингулярностях было открытие автора [12, 13], что черные дыры с постоянной скоростью рождают частицы и излучают их с тепловым спектром. Поскольку это излучение уносит энергию, черные дыры должны, по-видимому, терять массу и в конце концов исчезать. Если попытаться описать этот процесс испарения черной дыры при помощи классической пространственно-временной метрики, то появление голой сингулярности неизбежно, когда черная дыра исчезает. Даже ес-

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

ли черная дыра не испаряется полностью, можно рассматривать испущенные частицы как выходящие из сингулярности внутри черной дыры и туннелировавшие через горизонт событий по пространственно-подобным траекториям. Таким образом, даже наблюдатель на бесконечности не может не видеть того, что происходит в сингулярности.

4. *Квантование общей теории относительности.* Можно было бы ожидать, что в очень сильных полях вблизи сингулярности будут важны квантовые гравитационные эффекты. Некоторые надеются, поэтому, что такие квантовые эффекты могут предотвратить возникновение сингулярности или могут размазать ее некоторым образом так, чтобы сохранить полную предсказуемость в рамках, накладываемых принципом неопределенности. Однако возникают серьезные трудности при попытках рассматривать квантовую гравитацию аналогично квантовой электродинамике при помощи теории возмущений относительно некоторой исходной метрики (обычно плоского пространства). Обычно в электродинамике производят разложение в ряд теории возмущений по степеням малого параметра $e^2/\hbar c$, квадрата заряда. Вследствие принципа эквивалентности величина в общей теории относительности, которая соответствует заряду в электродинамике, — это энергия частицы. Поэтому теория возмущений — это по существу ряд по степеням различных встречающихся энергий, деленных на планковскую массу $\hbar^{1/2} c^{1/2} G^{-1/2} \simeq 10^{-5}$ г.

Эта процедура хороша для низкоэнергетических древесных диаграмм, но она отказывает для диаграмм с замкнутыми петлями, где имеется интегрирование по всем энергиям. При энергиях порядка планковской массы все диаграммы становятся одинаково важными, и ряд расходится. Это является основной причиной, почему общая теория относительности не перенормируема [14, 15].

Каждая дополнительная замкнутая петля включает новое бесконечное вычитание. Так появляется бесконечная последовательность конечных остатков или параметров перенормировки, которые не определяются теорией. Нельзя поэтому, как надеялись, построить S -матрицу, которая приводила бы к определенным предсказаниям. Трудность с теорией возмущений в том, что она применяет световые конусы фиксированного исходного пространства. Поэтому она не может описывать ситуации, при которых вследствие вакуумных флуктуаций образуются горизонты или вырезаются дыры. Это не значит, что нельзя квантовать гравитацию, но требуется новый подход.

Одна из возможных точек зрения на неудачу указанных попыток избежать нарушения детерминированности могла бы состоять в том, что мы пока еще не открыли правильной теории. Цель настоящей статьи, однако, заключается в том, чтобы показать, что это не так, если согласиться с тем, что квантовые эффекты будут вызывать излучение черной дыры. В этом случае существует фундаментальное ограничение нашей способности предсказаний, которое аналогично, но дополнительно к обычному квантовомеханическому принципу неопределенности. Это добавочное ограничение возникает из-за того, что общая теория относительности позволяет причинной структуре пространства-времени быть совершенно отличной от структуры пространства Минковского. Например, в случае гравитационного коллапса, приводящего к черной дыре, существует горизонт событий, который не дает наблюдателю на бесконечности измерять параметры внутреннего состояния черной дыры, за исключением ее массы, углового момента и заряда. Это означает, что измерения в бесконечности будущего недостаточны для того, чтобы полностью определить состояние системы в бесконечности прошлого: требуются также данные на горизонте событий, описывающие то, что падает в черную дыру. Можно подумать, что можно было бы иметь наблюдателей, расположенных непосредственно снаружи от горизонта событий, которые посылали бы сигнал наблюдателям на бесконечности каждый раз, когда некоторая частица падает в черную дыру. Однако это невозможно точно так же, как нельзя иметь наблюдателей, которые будут измерять сразу и положение и скорость частицы. Для того чтобы сигнализировать точно момент времени, в который частица пересекает горизонт событий, требуется фотон той же длины волны и поэтому той же энергии, как у падающей частицы. Если проделать это для каждой частицы, которая подвергается гравитационному коллапсу, образуя черную дыру, полная энергия, нужная для сигнала, была бы равна энергии коллапсирующего тела, и поэтому не оставалось бы энергии на образование черной дыры. Отсюда поэтому следует, что когда образуется черная дыра, нельзя вывести результаты измерений на бесконечности в прошлом из наблюдений на бесконечности в будущем. Это может показаться не таким уже страшным, поскольку обычно больше имеют дело с предсказанием будущего, чем прошлого. Однако, хотя в такой ситуации и можно было бы в классической теории определить данные на

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

бесконечности в будущем из данных на бесконечности в прошлом, этого нельзя будет сделать, если принять во внимание квантовые эффекты. Например, в квантовой механике частицам разрешается туннелировать по пространственноподобным или направленным в прошлое мировым линиям. Поэтому для частицы имеется возможность туннелировать из черной дыры через горизонт событий и уйти на бесконечность в будущем. Такое событие можно интерпретировать как спонтанное рождение в гравитационном поле черной дыры пары частиц, одной с отрицательной, а другой с положительной энергией по отношению к бесконечности. Частица с отрицательной энергией могла бы упасть в черную дыру, где имеются состояния с отрицательной энергией относительно бесконечности. Частицы с положительной энергией могут уйти на бесконечность, где они образуют предсказанное недавно тепловое излучение от черных дыр. Поскольку эти частицы вылетают из внутренности черной дыры, о которой внешний наблюдатель не имеет никакой информации, он не может предсказать амплитуды вероятности их излучения, но только *вероятности* без фаз.

В разд. 3 и 4 этой статьи показано, что квантовое излучение из черной дыры полностью случайное и некоррелированное. Аналогичные результаты были получены Уолдом [16] и Паркером [17]. Черная дыра излучает с равной вероятностью любую конфигурацию частиц, совместную с сохранением энергии, углового момента и заряда (не каждая конфигурация достигает бесконечности с равной вероятностью, потому что вокруг черной дыры имеется потенциальный барьер, который зависит от углового момента частиц и который может отразить некоторые из частиц обратно в черную дыру). Этот результат может рассматриваться как квантовая версия теорем об "отсутствии волос", потому что это приводит к тому, что наблюдатель на бесконечности не может предсказывать внутреннее состояние черной дыры, за исключением ее массы, углового момента и заряда: если черная дыра излучала бы некоторую конфигурацию частиц с большей вероятностью, чем другие, наблюдатель мог бы иметь некоторую априорную информацию о внутреннем состоянии. Конечно, если наблюдатель измерит волновые функции всех частиц, которые были излучены в данном случае, он сможет тогда определить внутреннее состояние черной дыры апостериори, но к тому времени она уже исчезнет.

Гравитационный коллапс, который приводит к горизонту событий, — это пример ситуации, в которой область взаимодействия ограничена

начальной поверхностью, на которой заданы начальные данные, конечной поверхностью, на которой производятся измерения, и в добавок третьей "скрытой" поверхностью, относительно которой наблюдатель может иметь только ограниченную информацию, такую как поток энергии, углового момента или заряда. Такие скрытые поверхности могут окружать или сингулярности (как в решении Шварцшильда) или "кратовые норы", ведущие в другие области пространства-времени, о которых наблюдатель не имеет информации (как в решении Рейсснера — Нордстрема или других). Относительно таких поверхностей имеется *принцип игнорантности*.

Все данные на "скрытой" поверхности, совместные с ограниченной наблюдаемой информацией, равновероятны.

До сих пор обсуждение велось в терминах квантованных полей материи в фиксированной классической внешней метрике (квазиклассическое приближение). Однако можно распространить эти принципы на рассмотрения, в которых гравитационное поле также квантуется при помощи фейнмановского интеграла по историям. При этом производится интегрирование (с пока еще неопределенной мерой) по всем конфигурациям как полей материи, так и гравитационного поля. Классический пример горизонтов событий черной дыры показывает, что в этот интеграл входят и метрики, в которых область взаимодействия (т.е. область, по которой вычисляется действие) ограничена не только начальной и конечной поверхностями, но также и скрытой поверхностью. Действительно, в любой квантовогравитационной ситуации существует возможность появления "виртуальных" черных дыр, которые возникают из ничего, а затем снова исчезают. Поэтому следует включить в интеграл по историям метрики, содержащие случайные дыры, приводящие или к сингулярностям или к другим областям пространства-времени, о которых ничто не известно. Следовательно, нужно ввести скрытую поверхность вокруг каждой из этих дыр и применить принцип игнорантности, чтобы сделать утверждение, что все полевые конфигурации на этих скрытых поверхностях равновероятны при условии, что они совместны с сохранением массы, углового момента и т.д., которые можно измерить при помощи интегралов по поверхности на некотором расстоянии от дыры.

Пусть H_1 будет гильбертово пространство всех возможных данных на начальной поверхности, H_2 — гильбертово пространство всех

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

возможных данных на скрытой поверхности и H_3 — гильбертово пространство всех возможных данных на конечной поверхности. Основное предположение квантовой теории заключается в том, что существует некоторый тензор S_{ABC} , три индекса которого относятся соответственно к H_3 , H_2 и H_1 , такой, что если

$$\xi_C \in H_1, \quad \zeta_B \in H_2, \quad \chi_A \in H_3,$$

то

$$\sum \sum \sum S_{ABC} \chi_A \zeta_B \xi_C$$

есть амплитуда вероятности иметь начальное состояние ξ_C , конечное состояние χ_A и состояние ζ_B на скрытой поверхности. Если дано только начальное состояние ξ_C , то определить конечное состояние нельзя, но можно определить только элемент $\sum S_{ABC} \xi_C$ тензорного произведения $H_2 \otimes H_3$. Поскольку состояние на скрытой поверхности неизвестно, нельзя найти амплитуду для измерений на конечной поверхности, приводящих к результату χ_A , но можно вычислить вероятность этого, которая равна $\sum \sum \sum \rho_{CD} \bar{\chi}_C \chi_D$, где

$$\rho_{CD} = \sum \sum \sum \bar{S}_{CBE} S_{DBF} \bar{\xi}_E \xi_F$$

матрица плотности, которая полностью описывает наблюдения, производимые только на поверхности в будущем, а не на скрытой поверхности. Заметим, что эта матрица плотности получается из $\sum S_{ABC} \xi_C$ суммированием с равным весом по всем ненаблюдаемым состояниям на "скрытой" поверхности.

Из предыдущего можно видеть, что не существует S -матрицы, или оператора, который отображал бы начальные состояния в конечные состояния, потому что наблюдаемая конечная ситуация описывается не чистым квантовым состоянием, а матрицей плотности. На самом деле начальная ситуация будет, вообще говоря, также описываться не чистым состоянием, а матрицей плотности из-за скрытых поверхностей, возникающих в более ранние времена. Вместо S -матрицы мы будем иметь новый оператор, называемый оператором суперрассеяния S , который отображает матрицы плотности, описывающие начальную ситуацию, в матрицы плотности, описывающие конечную ситуацию. Этот оператор может рассматриваться как тензор с четырьмя индексами S_{ABCD} , где первые два индекса действуют в конечном пространстве $H_3 \otimes H_3$, а последние два индекса действуют в про-

странстве $H \otimes H_1$. Он связан с трех индексным тензором S_{ABC} соотношением

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} \sum (\bar{S}_{AEC} S_{BED} + \bar{S}_{BEC} S_{AED}).$$

Конечная матрица плотности ρ_{2AB} выражается через начальную матрицу плотности ρ_{1CD} следующим образом:

$$\rho_{2AB} = \sum \sum S_{ABCD} \rho_{1CD}.$$

Оператор суперрассеяния обсуждается далее в разд. 5.

Тот факт, что при гравитационных взаимодействиях конечная ситуация на бесконечности описывается матрицей плотности, а не чистым состоянием, указывает, что квантовая гравитация не может, как надеялись, быть перенормирована так, чтобы привести к хорошо определенной S -матрице с только конечным числом неопределенных параметров. Кажется основательным предположить, что существует тесная связь между бесконечной последовательностью перенормировочных констант, которая появляется в теории возмущений и потерей предсказуемости, которая возникает из-за скрытых поверхностей.

Можно также обратиться к принципу игнорантности для того, чтобы дать возможное объяснение наблюдениям микроволнового фонового излучения и избытку гелия и дейтерия, которые указывают, что ранняя вселенная была очень близка к пространственной однородности и изотропии и находилась в тепловом равновесии. Можно рассматривать поверхность, очень близкую к начальной сингулярности большого взрыва (скажем, при планковском времени 10^{43} с) как "скрытую поверхность" в том смысле, что мы не имеем о ней никакой информации априори. Эта начальная поверхность могла бы тогда излучать все конфигурации частиц с равной вероятностью. Для того чтобы получить тепловое распределение, нужно было бы наложить некоторые ограничения на полную энергию конфигураций, где полная энергия — это энергия массы покоя частиц плюс их кинетическая энергия вследствие расширения минус их гравитационная потенциальная энергия. Из наблюдений эта энергия очень близка, если не равна в точности нулю, и это можно рассматривать как необходимое условие нашего существования: если бы полная энергия была большой и положительной, вселенная расширялась бы слишком быстро для того, чтобы образовать галактики, а если бы полная энергия была большой и

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

отрицательной, вселенная коллапсировала бы раньше, чем успела бы развиться разумная жизнь. Поэтому мы имеем некоторую ограниченную информацию о данных на начальной поверхности из самого факта нашего существования. Если предположить, что начальная поверхность излучает с равной вероятностью все конфигурации частиц с полной энергией (при некотором соответствующем определении), примерно равной нулю, то приблизительно тепловое распределение есть наиболее вероятное макросостояние, так как оно соответствует наибольшему числу микросостояний. Любое значительное отклонение от однородности или изотропности могло бы истолковываться как наличие в некоторых длинноволновых модах очень большого числа гравитонов в количестве, сильно превосходящем то, которое должно быть по тепловому распределению, и поэтому весьма невероятном. Следует отметить, что этот взгляд на степень общности изотропного расширения противоположен тому, который был принят Коллинзом и Хокингом [18]. Различие возникает из-за рассмотрения микроскопических вместо макроскопических конфигураций.

Можно также попытаться объяснить наблюдаемый чисто барионный заряд вселенной, сказав, что мы как наблюдатели могли бы возникнуть только из начальных конфигураций, которые имели чисто барионный заряд. Альтернативное объяснение могло бы состоять в том, что нарушение CP в сильно T -несимметричной ранней вселенной приводило бы к тому, что расширяющиеся конфигурации, в которых преобладают барионы, имели бы меньшую энергию, чем подобные расширяющиеся конфигурации, в которых преобладают антибарионы. Это означало бы, что при данной плотности энергии имелось бы больше конфигураций с положительным барионным зарядом, чем с отрицательным барионным зарядом, таким образом, среднее значение барионного заряда было бы положительным. С другой стороны, может существовать некоторый тип спонтанного нарушения симметрии, которое приводит к тому, что области, в которых имеются только барионы или только антибарионы, имеют более низкую плотность энергии, чем области, содержащие смесь барионов и антибарионов. В этом случае, как указал Омнес [19], мог бы происходить фазовый переход, при котором чисто барионные области отделялись бы от чисто антибарионных. В отличие от случая, рассмотренного Омнесом, не существует причины,

почему такое разделение не должно происходить в масштабе длин, больших чем горизонт частицы. Такое большое разделение могло бы преодолеть большую часть трудностей в модели Омнеса.

Существует тесная связь между предложенным выше объяснением изотропии вселенной и предложением Зельдовича (см. [20]), что она вызвана рождением частиц в анизотропных областях. В этой работе, однако, для того чтобы определить рождение частиц, было сделано предположение, что на ранних этапах вселенная не зависит от времени (что, очевидно, не так). Настоящий подход обходит трудность с утверждениями относительно ранних этапов; нужно просто подсчитать конфигурации в некоторый подходящий поздний момент.

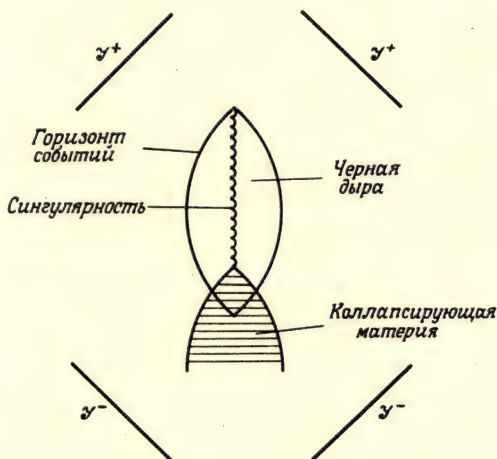
Вывод настоящей статьи в том, что гравитация вводит новый уровень неопределенности или случайности в физику сверх и выше неопределенности, обычно связываемой с квантовой механикой. Эйнштейн был очень удручен индетерминированностью квантовой механики, потому что он испытывал ощущение, что "Бог не играет в кости". Однако результаты, приведенные здесь, показывают, что "Бог не только играет в кости, Он иногда забрасывает их туда, где их нельзя увидеть".

2. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

В этом разделе дан краткий набросок формализма квантовой теории на заданном пространственно-временном многообразии, который применялся Хокингом [13] при выводе квантовомеханического излучения из черных дыр. Этот формализм будет использован в разд. 3 для того, чтобы показать, что излучение, которое приходит на бесконечность, полностью тепловое и некоррелированное. В разд. 4 специальный выбор состояний для частиц, падающих в черную дыру, применяется для того, чтобы точно вычислить состояния падающих и излученных частиц. Это покажет, что частицы рождаются парами, причем одна из этой пары всегда падает в дыру, а другая или падает или уходит на бесконечность. Разд. 5 содержит обсуждение оператора суперрассеяния S , который отображает матрицы плотности, описывающие начальную ситуацию, в матрицы плотности, описывающие конечную ситуацию.

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Для простоты будут рассматриваться только безмассовое эрмитово скалярное поле ϕ и незаряженная невращающаяся черная дыра. Обобщение на заряженные массивные поля высшего спина и на заряженные вращающиеся черные дыры производится непосредственно по плану, указанному в работе [13]. В этой статье будет применяться система единиц, в которой $G = c = \hbar = k = 1$.



Ф и г. 1. Гравитационный коллапс приводит к черной дыре, которая медленно испаряется вследствие излучения на световую бесконечность будущего y^+ . Из-за потери энергии черная дыра уменьшается в размерах и в конце концов исчезает.

Диаграмма рассматриваемой ситуации изображена на фиг. 1: гравитационный коллапс приводит к появлению черной дыры, которая медленно испаряется и в конечном счете исчезает вследствие квантовомеханического рождения и излучения частиц. За исключением конечной стадии испарения, когда черная дыра достигает планковской массы, обратное влияние гравитационного поля очень мало, и его можно рассматривать как неквантованное внешнее поле. Метрика в поздние времена может быть аппроксимирована последовательностью не зависящих от времени решений Шварцшильда, а гравитационный коллапс можно считать сферически-симметричным (в работе [13] бы-

ло показано, что отклонения от сферической симметрии не вносят существенных изменений).

Оператор скалярного поля ϕ удовлетворяет уравнению

$$\square \phi = 0 \quad (2.1)$$

в рассматриваемой метрике и коммутационным соотношениям

$$[\phi(x), \phi(y)] = iG(x, y), \quad (2.2)$$

где $G(x, y)$ есть половина запаздывающей минус половина опережающей функции Грина. Можно выразить оператор ϕ в виде

$$\phi = \sum (f_i a_i + \bar{f}_i a_i^\dagger), \quad (2.3)$$

где $\{f_i\}$ — полное ортонормированное семейство комплекснозначных решений волнового уравнения $\square f_i = 0$, которые содержат только положительные частоты на световой бесконечности прошлого \mathcal{I}^- . Операторы a_i не зависят от координат и удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[a_i, a_j] = 0, \quad (2.4)$$

$$[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.5)$$

Операторы a_i и a_j^\dagger являются соответственно операторами рождения и уничтожения частиц в i -й моде на бесконечности прошлого. Начальное вакуумное состояние для скалярных частиц $|0_- \rangle$, т.е. состояние, которое не содержит скалярных частиц на бесконечности прошлого, определяется из условия

$$a_i |0_- \rangle = 0 \text{ для всех } i. \quad (2.6)$$

ϕ можно также представить в виде

$$\phi = \sum_i (p_i b_i + \bar{p}_i b_i^\dagger + q_i c_i + q_i c_i^\dagger). \quad (2.7)$$

Здесь $\{p_i\}$ — полное ортонормированное семейство решений волнового уравнения, которое содержит только положительные частоты на световой бесконечности будущего \mathcal{I}^+ и которое является чисто уходящим, т.е. оно имеет нулевые условия Коши на горизонте событий H . $\{q_i\}$ — полная ортонормированная последовательность решений волнового уравнения, которая не содержит выходящих компонент. Независимые от координат операторы b_i и c_i удовлетворяют коммутационным соотношениям

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

$$[b_i, b_j] = [c_i, c_j] = 0, \quad (2.8)$$

$$[b_i, c_j] = [b_i, c_j^\dagger] = 0, \quad (2.9)$$

$$[b_i, b_j^\dagger] = [c_i, c_j^\dagger] = \delta_{ij}. \quad (2.10)$$

Операторы b_i и b_i^\dagger — соответственно операторы уничтожения и рождения для частиц, уходящих на бесконечность будущего. По аналогии можно рассматривать операторы c_i и c_i^\dagger как операторы уничтожения и рождения частиц, падающих в черную дыру. Тем не менее, поскольку нельзя однозначно определить положительную частотность для $\{q_i\}$, разделение на операторы рождения и уничтожения неоднозначно, и, следовательно, не следует придавать слишком много физического смысла этой интерпретации. Неединственность $\{c_i\}$ и $\{c_i^\dagger\}$ не влияет на любые наблюдаемые на бесконечности будущего. В разд. 4 будет сделан частный выбор $\{q_i\}$, который позволит проделать точное вычисление для частиц, падающих в черную дыру. Конечное вакуумное состояние для скалярных частиц $|0_+>$, т.е. состояние, которое не содержит выходящих частиц на бесконечности будущего или частиц, падающих на черную дыру, определяется из условия

$$b_i |0_+> = c_i |0_+> = 0. \quad (2.11)$$

Оно может быть представлено как $|0_I> |0_H>$, где операторы b и c действуют соответственно на $|0_I>$ и $|0_H>$, которые являются вакуумами для уходящих частиц и частиц, падающих в черную дыру. $|0_I>$ единственным образом определяется из условия положительной частотности $\{p_i\}$, однако произвол в выборе $\{q_i\}$ означает, что $|0_H>$ не единственно.

Поскольку безмассовые поля полностью определяются их значениями на \mathcal{I}^- , можно представить $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ как линейные комбинации $\{f_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$:

$$p_i = \sum_j (\alpha_{ij} f_j + \beta_{ij} \bar{f}_j), \quad (2.12)$$

$$q_i = \sum_j (\gamma_{ij} f_j + \eta_{ij} \bar{f}_j). \quad (2.13)$$

Эти соотношения приводят к соответствующим соотношениям между операторами:

$$b_i = \sum_j (\bar{\alpha}_{ij} a_j - \bar{\beta}_{ij} a_j^\dagger), \quad (2.14)$$

$$c_i = \sum_j (\bar{\gamma}_{ij} a_j - \bar{\eta}_{ij} a_j^\dagger). \quad (2.15)$$

В рассматриваемой ситуации метрика сферически симметрична. Это значит, что угловая зависимость $\{f_i\}$, $\{p_i\}$ и $\{q_i\}$ может быть взята как у сферических гармоник Y_{lm} . Соотношения (2.12) и (2.13) будут связывать только решения с одинаковыми значениями l и $|m|$. (Это не верно, если коллапс не сферически симметричен, но в [13] было показано, что это не приводит к существенному различию). Для вычислительных целей удобно применять f - и p -решения, которые имеют зависимость от времени вида $e^{i\omega'v}$ и $e^{i\omega u}$ соответственно, где v и u — опережающее и запаздывающее времена. Эти решения будут обозначаться через $\{f_{\omega'}\}$ и $\{p_{\omega'}\}$ и будут иметь непрерывную нормировку. Из их суперпозиции можно построить решения в виде волновых пакетов с конечной нормировкой. Суммирование в уравнениях (2.3), (2.7) и (2.12) заменяется на интегрирование по частотам. Операторы a_{ω} , b_{ω} и т.д. удовлетворяют аналогичным коммутационным соотношениям, содержащим δ -функций по частотам.

Преимущество применения компонент Фурье относительно времени состоит в том, что можно вычислить коэффициенты $\alpha_{\omega\omega'}$ и $\beta_{\omega\omega'}$ в приближении, когда масса черной дыры меняется медленно. Рассмотрим решение $p_{\omega'}$ распространяющееся назад во времени из бесконечности будущего. Часть $p_{\omega'}^{(1)}$ отражается на статической метрике Шварцшильда и приходит на бесконечность прошлого с той же частотой. Это дает член $r_{\omega} \delta(\omega - \omega')$ в $\alpha_{\omega\omega'}$, где r_{ω} — коэффициент отражения в метрике Шварцшильда для частоты ω и данной угловой моды. Более интересно поведение части $p_{\omega'}^{(2)}$, которая распространяется через коллапсирующее тело и уходит на бесконечность прошлого с очень большим синим смещением. Это дает вклады в $\alpha_{\omega\omega'}$ и $\beta_{\omega\omega'}$ вида

$$\alpha_{\omega\omega'}^{(2)} \simeq t_{\omega} (2\pi)^{-1} e^{i(\omega - \omega')v_0} \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^{1/2} \Gamma\left(1 - \frac{i\omega}{\chi}\right) (-i\omega')^{-1+i\omega/\chi}, \quad (2.16)$$

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

$$\beta_{\omega\omega'}^{(2)} \simeq -i\alpha_{\omega(-\omega')}^{(2)}, \quad (2.17)$$

где $\kappa = (4M)^{-1}$ — поверхностная гравитация черной дыры и коэффициент прохождения для данной метрики Шварцшильда, т.е.

$$|t_\omega|^2 = \Gamma_\omega$$

есть доля волн с частотой ω и данной угловой зависимостью, которые проникают через потенциальный барьер в дыру,

$$|t_\omega|^2 + |r_\omega|^2 = 1.$$

3. ВЫХОДЯЩЕЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Предположим, что на бесконечности прошлого никаких скалярных частиц нет, т.е. что система находится в начальном вакуумном для скалярных частиц состоянии $|0_- \rangle$. (Это не истинный вакуум, поскольку он содержит материю, из которой образуется черная дыра.) Состояние $|0_- \rangle$ не будет совпадать с конечным вакуумным для скалярных частиц состоянием $|0_+ \rangle$, потому что происходит рождение частиц. Можно представить $|0_- \rangle$ как линейную комбинацию состояний с различным числом частиц, уходящих на бесконечность и за горизонт:

$$|0_- \rangle = \sum \sum \lambda_{AB} |A_I \rangle |B_H \rangle, \quad (3.1)$$

где $|A_I \rangle$ — состояние уходящих частиц с n_{ja} частицами в j -й уходящей моде, а $|B_H \rangle$ — состояние на горизонте с n_{kb} частицами в k -й моде, падающими в дыру. Другими словами,

$$|A_I \rangle = \prod_j (n_{ja}!)^{-1/2} (b_j^\dagger)^{n_{ja}} |0_I \rangle, \quad (3.2)$$

$$|B_H \rangle = \prod_k (n_{kb}!)^{-1/2} (c_k^\dagger)^{n_{kb}} |0_H \rangle. \quad (3.3)$$

Оператор Q , который соответствует некоторой наблюдаемой на бесконечности будущего, будет состоять только из $\{b_j\}$ и $\{b_j^\dagger\}$ и будет действовать только на вектора $|A_I \rangle$. Таким образом, среднее значение этого оператора будет равно

$$\langle 0_- | Q | 0_- \rangle = \sum \sum \rho_{AC} Q_{CA}, \quad (3.4)$$

где $Q_{CA} = \langle C_I | Q | A_I \rangle$ – матричный элемент оператора Q в гильбертовом пространстве уходящих состояний, а $\rho_{AC} = \sum \lambda_{AB} \bar{\lambda}_{CB}$ есть матрица плотности, которая полностью описывает все наблюдения, которые делаются только на бесконечности будущего и при которых не производят измерений того, что происходит в дыре. Компоненты ρ_{AC} можно полностью определить, если известны средние значения полиномов от операторов $\{b_j\}$ и $\{b_j^\dagger\}$. Таким образом, матрица плотности не зависит от неоднозначности в выборе $\{q_j\}$, которые описывают частицы, падающие в дыру.

Как пример такого полинома рассмотрим $b_j^\dagger b_j$ – оператор числа частиц для j -й уходящей моды.

Тогда

$$\langle n_j \rangle = \sum n_{ja} \rho_{AA} = \langle 0_- | b_j^\dagger b_j | 0_- \rangle = \sum_k |\beta_{jk}|^2. \quad (3.5)$$

Для того чтобы вычислить это последнее выражение, разложим конечнонормированный волновой пакет моды p_j по непрерывнонормированным модам p_ω ,

$$p_j(u) = \int \tilde{p}_j(\omega) p_\omega(u) d\omega, \quad (3.6)$$

где

$$\int \tilde{p}_j \tilde{p}_l d\omega = \delta_{jl}, \quad (3.7)$$

тогда

$$\langle n_j \rangle = \iiint \tilde{p}_j(\omega_1) \tilde{p}_j(\omega_2) \beta_{\omega_1 \omega'} \bar{\beta}_{\omega_2 \omega'} d\omega_1 d\omega_2 d\omega'.$$

Если волновой пакет представляет собой острый пик около частоты ω , можно применить уравнение (2.14) для того, чтобы показать, что

$$\begin{aligned} \int \beta_{\omega_1 \omega'} \bar{\beta}_{\omega_2 \omega'} d\omega' &= (2\pi)^{-2} |t_\omega|^2 |\Gamma(1 - i\omega\kappa^{-1})|^2 \times \\ &\times e^{i(\omega_1 - \omega_2)v_0} \omega^{-1} e^{-\pi\omega\kappa^{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iy\kappa^{-1}(\omega_1 - \omega_2)} dy, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $y = \ln(-\omega')$. Множитель $e^{-\pi\omega\kappa^{-1}}$ возникает из аналитического продолжения ω' на отрицательные значения в выражении (2.15) для $\beta_{\omega\omega'}$,

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

$$(3.8) = |t_\omega|^2 (e^{2\pi\omega\kappa^{-1}} - 1)^{-1} \delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (3.9)$$

поэтому

$$\langle n_j \rangle = |t_\omega|^2 (e^{2\pi\omega\kappa^{-1}} - 1). \quad (3.10)$$

Это в точности среднее значение для тела, испускающего тепловое излучение с температурой $T = \kappa/2\pi$. Для того чтобы показать, что вероятности излучения различного числа частиц в j -й моде и средние не только числа частиц, но и другие, согласуются с утверждением о тепловом излучении, можно вычислить среднее значение n_j^2 , n_j^3 и т.д. Например,

$$\langle n_j^2 \rangle = \langle 0_- | b_j^\dagger b_j b_j^\dagger b_j | 0_- \rangle = \langle n_j \rangle + \langle 0_- | (b_j^\dagger)^2 (b_j)^2 | 0_- \rangle. \quad (3.11)$$

Можно вычислить второе слагаемое в правой части уравнения (3.11), применяя уравнения (2.14) и (2.15), как выше. Члены $\alpha_{\omega\omega}^{(2)}$ приводят к выражениям, содержащим функции типа $\delta(\omega_1 + \omega_2)$, которые вкладать не дают, так как ω_1 и ω_2 — обе положительные. Члены в $\alpha_{\omega\omega}^{(1)}$ приводят к выражениям, содержащим функции типа $\int \tilde{p}_j^2(\omega) d\omega$, которые равны нулю, поскольку для волновых пакетов при поздних временах фаза $\tilde{p}_j(\omega)$ меняется очень быстро с изменением ω . Таким образом,

$$\langle n_j^2 \rangle = \frac{x\Gamma[1 + (2\Gamma - 1)x]}{(1 - x)^2}, \quad (3.12)$$

где $x = e^{-\omega T^{-1}}$ и $\Gamma = |t_\omega|^2$. Действуя по индукции, можно вычислить следующие моменты $\langle n_j^3 \rangle$ и т.д. Все они согласуются с вероятностным распределением для n частиц в j -й моде,

$$P(n_j) = \frac{(1 - x)(x\Gamma)^n}{[1 - (1 - \Gamma)x]^{n+1}}. \quad (3.13)$$

Это в точности комбинация вероятности $(1 - x)x^m$ теплового излучения m частиц в данной моде с вероятностью Γ , что данная излученная частица будет уходить на бесконечность, а не отразится потенциальным барьером назад в дыру.

Можно также исследовать, существуют ли какие-либо корреляции между фазами излучения различного числа частиц в одной и той же моде, рассмотрев средние значения операторов типа $b_j b_j$, которые связывают компоненты матрицы плотности с различным числом частиц в j -й моде. Все эти средние значения равны нулю. Для того чтобы увидеть, существуют ли какие-либо корреляции между различными модами, можно рассмотреть средние значения операторов типа $b_j^\dagger b_l$, которые связывают различные недиагональные компоненты матрицы плотности. Все они также равны нулю. Таким образом, матрица плотности полностью диагональна в базисе состояний с определенным числом частиц в модах, которые представляют собой резкие пики по частоте. Можно выписать матрицу плотности явно:

$$\rho_{AC} = \prod_j \delta_{n_{ja} n_{jc}} P(n_{ja}). \quad (3.14)$$

Матрица плотности (3.14) в точности такая, какую можно было бы ожидать для тела, испускающее тепловое излучение.

Так как черная дыра излучает, ее масса будет уменьшаться, а температура будет увеличиваться. Это излучение будет медленным до тех пор, пока масса черной дыры не уменьшится примерно до планковской массы. Таким образом, в хорошем приближении вероятность излучения n_j частиц в виде волнового пакета j -й моды будет даваться выражением (3.13), где температура соответствует массе черной дыры в момент запаздывающего времени, около которого j -я мода имеет пик. После того как черная дыра полностью испарилась и исчезла, единственными возможными для излучения на бесконечности будущими состояниями $|A_f\rangle$ будут такие, для которых полная энергия частиц равна первоначальной массе M_0 черной дыры. Вероятность возникновения такого состояния будет

$$P(A) = \rho_{AA} = \prod_j P(n_{ja}). \quad (3.15)$$

Если Γ равны единице для всех мод, то

$$\ln [P(A)] = \sum_j \ln (1 - x_{ja}) - \sum_j 8\pi n_{ja} \omega_j M_{ja}, \quad (3.16)$$

где M_{ja} — масса, к которой черная дыра была редуцирована в момент запаздывающего времени j -й моды вследствие излучения частиц в конфигурации A . Вследствие закона сохранения энергии $\sum_j n_{ja} \omega_j = M_0$.

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

для всех возможных конфигураций A излученных частиц. Поскольку M_{ja} является только слабо меняющейся функцией номера моды j , последний член в уравнении (3.16) будет приблизительно один и тот же для всех конфигураций A . Таким образом, черная дыра излучает все конфигурации с равной вероятностью. Вероятности различных конфигураций на бесконечности будущего не одинаковы, потому что факторы Γ различны для различных мод.

4. ПАДАЮЩИЕ ЧАСТИЦЫ

В этом разделе будет сделан специальный выбор падающих решений $\{q_i\}$, который позволит провести явное вычисление коэффициентов λ_{AB} , так что состояние системы может быть выражено в терминах частиц, падающих в черную дыру, и частиц, улетающих на бесконечность. Уходящие решения $\{p_j\}$ выбраны так, что они имеют только положительные частоты вдоль орбит приближенно транслирующего время вектора Киллинга K в квазистационарной области вне черной дыры в поздние времена. Они поэтому соответствуют модам частиц, которые могли бы быть зарегистрированы наблюдателем с детектором, движущимся по мировой линии на постоянном расстоянии от черной дыры. Они не соответствуют тому, что могли бы обнаружить нестационарные наблюдатели, в частности наблюдатели, падающие в черную дыру, потому что они не являются чисто положительно-частотными вдоль мировых линий таких наблюдателей.

Стационарный наблюдатель, находящийся вне черной дыры, мог бы считать частицу, которую он обнаружил в моде $\{p_j\}$, одной из пары частиц, рожденных гравитационным полем при коллапсе, причем другая имеет отрицательную энергию и падает в черную дыру. Состояния на горизонте $\{q_j\}$ будут выбраны так, что часть из них описывают те частицы с отрицательной энергией, которые стационарный наблюдатель рассматривает как существующие внутри черной дыры. Остающиеся $\{q_j\}$ будут описывать те частицы с положительной энергией, которые отражаются назад потенциальным барьером, окружающим черную дыру, и которые падают, проходя через горизонт событий. Следует отметить, что этот выбор $\{q_j\}$ не соответствует ничему, что мог бы измерить неподвижный наблюдатель, так как они не являются положительно-частотными вдоль его мировой линии. Однако при заданных $\{p_j\}$ выбор $\{q_j\}$, который будет применяться, являет-

ся минимальным в том смысле, что любой другой выбор мог бы описывать рождение добавочных пар частиц, таких, что обе они падают в черную дыру.

Для того чтобы вычислить коэффициенты α и β , которые связывают $\{p_i\}$ с $\{f_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$, разложим $\{p_i\}$ по компонентам Фурье $\{p_\omega\}$ с временной зависимостью вида $e^{i\omega u}$, где $u = t - r - 2M \ln(r - 2M)$ — запаздывающая временная координата в решении Шварцшильда. Поскольку u стремится к $+\infty$ во внешней области при подходе к горизонту будущего, поверхности постоянной фазы p_ω сжимаются в стопу сразу за горизонтом будущего (фиг. 2). Другими словами, p_ω ультрафиолетово сдвинута до очень высоких частот вблизи горизонта будущего. Это значит, что она распространяется по законам геометрической оптики назад сквозь коллапсирующее тело и уходит на световую бесконечность прошлого \mathcal{I}^- , где имеет временную зависимость вида

$$e^{-i\omega \kappa^{-1} \ln(v_0 - v)} \quad \text{для } v < v_0$$

$$0 \quad \text{для } v > v_0,$$
(4.1)

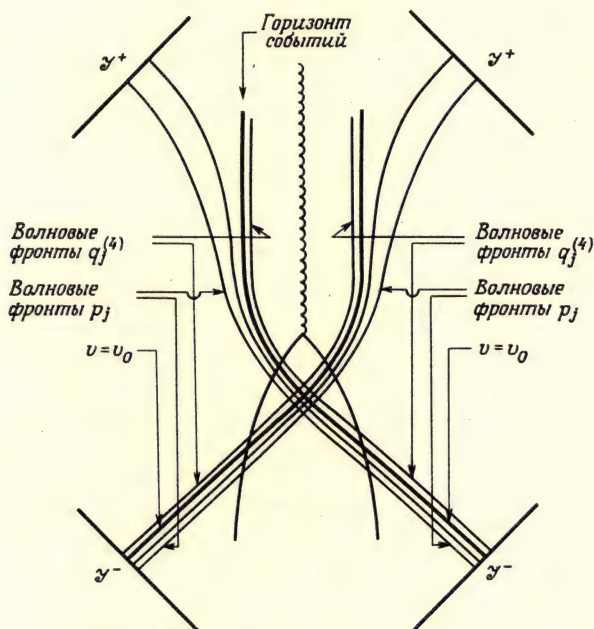
где $v = t + r + 2M \ln(r - 2M)$ — опережающая временная координата, а v_0 — последний момент опережающего времени, раньше которого световая геодезическая еще могла, начавшись на \mathcal{I}^- , пройти через центр коллапсирующего объекта и уйти на \mathcal{I}^+ . Подобным образом, для того чтобы вычислить коэффициенты γ и η , которые выражают $\{q_i\}$ через $\{f_i\}$ и $\{\bar{f}_i\}$, разложим $\{q_i\}$ по компонентам Фурье $\{q_\omega\}$. В квазистационарной области часть $\{q_\omega^{(3)}\}$, которая пересекает горизонт будущего в квазистационарной области, будет иметь зависимость от времени вида $e^{i\omega v}$. Часть $q_\omega^{(4)}$, которая пересекает горизонт сразу после его образования, будет иметь зависимость от времени вида $e^{-i\omega u}$ (знак минус из-за того, что во внутренней области направление возрастания u обратное). Поверхности постоянной фазы $\{q_\omega^{(4)}\}$ собираются в стопу сразу внутри горизонта (фиг. 2). Можно поэтому также распространить их назад по законам геометрической оптики через коллапсирующее тело на \mathcal{I}^- , где они будут иметь зависимость от времени вида

$$e^{i\omega \kappa^{-1} \ln(v - v_0)} \quad \text{для } v > v_0$$

$$0 \quad \text{для } v < v_0.$$
(4.2)

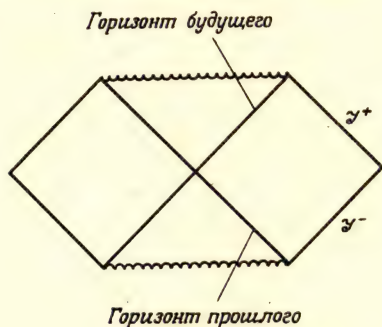
3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

Для того чтобы вычислить коэффициенты α , β , γ и η , можно разложить (4.1) и (4.2) на положительно- и отрицательно-частотные компоненты вида $e^{i\omega'v}$ и $e^{-i\omega'v}$ через опережающее время v на \mathcal{I}^- . Однако можно получить те же результаты, если оставить коллапсирующее тело и аналитически продолжить назад к горизонту прошлого



Ф и г. 2. Волновые фронты или поверхности постоянной фазы решений p_j собираются в стопу сразу вне горизонта событий вследствие большого синего смещения. Они распространяются по законам геометрической оптики через коллапсирующее тело и уходят на световую бесконечность прошлого \mathcal{I}^- непосредственно перед моментом опережающего времени $v = v_0$. Аналогично волновые фронты $q_j^{(4)}$ будут собираться в стопу вблизи от внутренней стороны горизонта событий и будут распространяться через коллапсирующее тело на \mathcal{I}^- сразу после наступления момента опережающего времени $v = v_0$.

шварцшильдовское решение, которое описывает квазистационарную область. Вместо того чтобы распространять p_ω и q_ω назад сквозь коллапсирующее тело на \mathcal{I}^- и разлагать их там на положительно- и отрицательно-частотные компоненты относительно опережающего времени v , распространим их назад к горизонту прошлого H^- и разложим их на положительно- и отрицательно-частотные компоненты относительно аффинного параметра U вдоль образующих H^- . (Подобная конструкция применялась Унру [21].) Тогда можно обсуждать рождение частиц в терминах диаграммы Пенроуза (фиг. 3) аналитически продолженного решения Шварцшильда. Начальное вакуумное состояние $|0_- \rangle$ теперь определяется как состояние, которое на \mathcal{I}^-



Фиг. 3. Диаграмма Пенроуза $r-t$ -плоскости аналитически продолженного пространства Шварцшильда. Световые линии проходят под углами в $\pm 45^\circ$, и сделано конформное преобразование для того, чтобы перевести бесконечность, представленную \mathcal{I}^+ и \mathcal{I}^- , на конечное расстояние. Каждая точка этой диаграммы представляет собой сферу с поверхностью $4\pi r^2$.

не имеет положительно-частотных компонент по отношению к опережающему времени v и которое на горизонте прошлого H^- не имеет положительно-частотных компонент по отношению к аффинному параметру U . Другими словами, можно представить оператор Φ в виде

$$\Phi = \int_0^\infty (a_\omega^{(1)} f_\omega^{(1)} + a_\omega^{(2)} f_\omega^{(2)} + \text{э.с.}) d\omega, \quad (4.3)$$

где $\{f_\omega^{(1)}\}$ — семейство решений волнового уравнения в аналитически продолженном решении Шварцшильда с непрерывной нормировкой, ко-

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

торое имеет нулевые данные Коши на горизонте прошлого и имеет зависимость от времени вида $e^{i\omega v}$ на \mathcal{I}^- , а $\{f_{\omega}^{(2)}\}$ — семейство решений с непрерывной нормировкой, которое имеет нулевые данные Коши на \mathcal{I}^- и зависимость от времени вида $e^{i\omega U}$ на горизонте прошлого. Начальное вакуумное состояние тогда определяется условиями

$$a_{\omega}^{(1)} |0_{-}\rangle = a_{\omega}^{(2)} |0_{-}\rangle = 0. \quad (4.4)$$

Это определение вакуумного состояния отлично от того, которое применял Бульвар [22] для аналитически продолженного решения Шварцшильда. Однако приведенное выше определение воспроизводит результаты о рождении частиц черной дырой, образовавшейся при коллапсе.

Аффинный параметр U на горизонте прошлого связан с запаздывающим временем u соотношением

$$u = -\kappa^{-1} \ln(-U), \quad (4.5)$$

где $-\infty < u < \infty$, $U < 0$. Можно аналитически продолжить (4.5), обходя логарифмическую сингулярность при $U = 0$. При этом получится мнимая часть $\pm \pi \kappa^{-1}$ в зависимости от того, совершается обход соответственно выше или ниже сингулярности. Определим два аналитических продолжения u_{+} и u_{-} :

$$\begin{aligned} u_{+} &= u_{-} = -\kappa^{-1} \ln(-U) \quad \text{при } U < 0, \\ u_{\pm} &= -\kappa^{-1} \ln U \pm i\pi \kappa^{-1} \quad \text{при } U > 0. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку u_{+} голоморфна в верхней полуплоскости U , функции $e^{i\omega u_{+}}$, заданные на любом пути, поднимающемся по горизонту прошлого от $U = -\infty$ до $U = +\infty$, содержат только положительные частоты относительно U . Это означает, что можно заменить семейство решений $\{f_{\omega}^{(2)}\}$, которые имеют нулевые данные Коши на \mathcal{I}^- и только положительные частоты относительно U на горизонте прошлого, на два ортонормированные семейства решений $\{f_{\omega}^{(3)}\}$ и $\{f_{\omega}^{(4)}\}$ с непрерывной нормировкой, которые имеют нулевые данные Коши на \mathcal{I}^- и которые имеют зависимость от времени на горизонте прошлого вида $e^{i\omega u_{+}}$ и $e^{-i\omega u_{+}}$ соответственно. Тогда можно записать Φ в виде

$$\Phi = \int (a_{\omega}^{(1)} f_{\omega}^{(1)} + a_{\omega}^{(3)} f_{\omega}^{(3)} + a_{\omega}^{(4)} f_{\omega}^{(4)} + \text{э.с.}) d\omega. \quad (4.7)$$

Уравнение (4.4) тогда примет вид

$$a_{\omega}^{(1)} |0_{-}\rangle = a_{\omega}^{(3)} |0_{-}\rangle = a_{\omega}^{(4)} |0_{-}\rangle = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (4.8) означает, что в модах $\{f_{\omega}^{(3)}\}$ и $\{f_{\omega}^{(4)}\}$ скалярные частицы отсутствуют. Однако эти моды распространяются через обе — и внутреннюю и внешнюю — области аналитически продолженного решения Шварцшильда. Наблюдатель на световой бесконечности будущего \mathcal{I}^{+} не сможет наблюдать эти моды полностью, но только их часть вне горизонта будущего. Для того чтобы установить соответствие с тем, что видит наблюдатель, введем новый базис, состоящий из трех ортонормированных семейств $\{w_{\omega}\}$, $\{y_{\omega}\}$ и $\{z_{\omega}\}$ решений с непрерывной нормировкой, обладающих следующими свойствами:

$\{w_{\omega}\}$ имеют нулевые данные Коши на \mathcal{I}^{-} и на горизонте прошлого при $U < 0$. На горизонте прошлого при $U > 0$ они имеют зависимость от времени вида $e^{-i\omega u_{+}}$. (Знак минус необходим для того, чтобы $\{w_{\omega}\}$ имели положительную норму Клейна — Гордона, и, таким образом, для того, чтобы соответствующие операторы уничтожения и рождения имели правильные коммутационные соотношения.)

$\{y_{\omega}\}$ имеют нулевые данные Коши на \mathcal{I}^{-} и на горизонте прошлого при $U > 0$. На горизонте прошлого при $U < 0$ они имеют зависимость от времени вида $e^{i\omega u_{+}}$.

$\{z_{\omega}\}$ имеют нулевые данные Коши на \mathcal{I}^{-} и на горизонте прошлого, а на \mathcal{I}^{-} они зависят от времени как $e^{i\omega u}$.

Моды $\{z_{\omega}\}$ описывают частицы, которые вылетают с \mathcal{I}^{-} и проходят через горизонт будущего с вероятностью $|t_{\omega}|^2$ или отражаются назад на \mathcal{I}^{+} с вероятностью $|r_{\omega}|^2$. Моды $\{y_{\omega}\}$ описывают частицы, которые в аналитически продолженном Шварцшильдовском пространстве вылетают с горизонта прошлого и которые улетают на \mathcal{I}^{+} с вероятностью $|t_{\omega}|^2$ или отражаются назад к горизонту будущего с вероятностью $|r_{\omega}|^2$. В пространстве-времени, которое содержит коллапсирующее тело, уходящие и приходящие решения $\{p_{\omega}\}$ и $\{q_{\omega}\}$ в квазистационарной области вне горизонта событий соответствуют линейной комбинации $\{y_{\omega}\}$ и $\{z_{\omega}\}$:

$$p_{\omega} = t_{\omega} y_{\omega} + r_{\omega} z_{\omega}, \quad q_{\omega} = \bar{r}_{\omega} y_{\omega} - \bar{t}_{\omega} z_{\omega}. \quad (4.9)$$

Моды $\{w_{\omega}\}$ представляют частицы, которые в аналитически продолженном пространстве Шварцшильда находятся всегда с внутренней

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

стороны от горизонта будущего в которые не проникают во внешнюю область. В реальном пространстве-времени с коллапсирующим телом они соответствуют частицам, которые пересекают горизонт событий сразу после его образования.

Моды $\{z_\omega\}$ имеют одинаковые данные Коши с $\{f_\omega^{(1)}\}$, поэтому они совпадают везде, т.е.

$$z_\omega = f_\omega^{(1)} \quad (4.10)$$

на горизонте прошлого при $U < 0$,

$$y_\omega = (1-x)^{1/2} f_\omega^{(3)} = x^{-1/2} (1-x)^{1/2} f_\omega^{(4)}, \quad (4.11)$$

где $x = e^{-2\pi\omega\kappa^{-1}}$. Множители $(1-x)^{1/2}$ и $x^{-1/2}(1-x)^{1/2}$ появились из-за нормировки. На горизонте прошлого при $U > 0$

$$w_\omega = x^{-1/2} (1-x)^{1/2} \bar{f}_\omega^{(3)} = (1-x)^{1/2} f_\omega^{(4)}. \quad (4.12)$$

Это приводит к тому, что $(1-x)^{-1/2} (y_\omega + x^{1/2} \bar{w}_\omega)$ имеют одинаковые данные Коши с $f_\omega^{(3)}$ и поэтому совпадают с ним везде, т.е.

$$\bar{f}_\omega^{(3)} = (1-x)^{-1/2} (y_\omega + x^{1/2} \bar{w}_\omega). \quad (4.13)$$

Аналогично

$$f_\omega^{(4)} = (1-x)^{-1/2} (w_\omega + x^{1/2} \bar{y}_\omega). \quad (4.14)$$

Можно записать оператор Φ в базисе $\{w_\omega, y_\omega, z_\omega\}$:

$$\Phi = \int (g_\omega w_\omega + h_\omega y_\omega + j_\omega z_\omega + \text{э.с.}) d\omega, \quad (4.15)$$

где $\{g_\omega\}$ и $\{g_\omega^\dagger\}$ и т.д. — операторы уничтожения и рождения частиц в модах $\{w_\omega\}$ и т.д. Сравнивая (4.15) с (4.7) и применяя (4.13) и (4.14), видим, что

$$\begin{aligned} a_\omega^{(3)} &= (1-x)^{-1/2} (h_\omega - x^{1/2} g_\omega^\dagger), \\ a_\omega^{(4)} &= (1-x)^{-1/2} (g_\omega - x^{1/2} h_\omega^\dagger), \\ a_\omega^{(1)} &= j_\omega. \end{aligned} \quad (4.16)$$

При помощи наложения решений с непрерывной нормировкой $\{f_\omega^{(1)}\}$ и т.д., $\{w_\omega\}$ и т.д. можно образовать ортонормированные семейства

решений типа волновых пакетов $\{f_j^{(1)}\}, \{f_j^{(3)}\}, \{f_j^{(4)}\}, \{w_j\}, \{y_j\}, \{z_j\}$. Если волновые пакеты имеют острые пики около частоты ω , то соответствующие операторы $a_j^{(1)}$ и т.д., g_j и т.д. будут связаны соотношением типа (4.16), где индекс ω заменяется на j и моды с одинаковым индексом j строятся из непрерывных мод одинаковым образом, т.е. они имеют одинаковые преобразования Фурье.

Можно задать вакуумное состояние $|0_+ \rangle$ в будущем соотношениями

$$g_j |0_+ \rangle = h_j |0_+ \rangle = j_j |0_+ \rangle = 0. \quad (4.17)$$

Затем можно определить состояния $|A; B; C \rangle$, которые содержат n_{1a} частиц в моде w_1 и т.д., n_{1b} частиц в моде y_1 и т.д., n_{1c} частиц в моде z_1 и т.д. следующим образом:

$$\begin{aligned} |A; B; C \rangle = & [\Pi(n_{ja}!)^{-1/2} (g_j^\dagger)^{n_{ja}}] \times \\ & \times [\Pi(n_{jb}!)^{-1/2} (h_j^\dagger)^{n_{jb}}] [\Pi(n_{jc}!)^{-1/2} (j_j^\dagger)^{n_{jc}}] |0_+ \rangle. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Начальное вакуумное состояние $|0_- \rangle$ можно представить как линейную комбинацию этих состояний:

$$|0_- \rangle = \sum \mu(A; B; C) |A; B; C \rangle. \quad (4.19)$$

Коэффициенты $\mu(A; B; C)$ можно найти, применяя уравнения (4.8) и (4.16), которые дают

$$(g_k - x^{1/2} h_k^\dagger) |0_- \rangle = 0, \quad (4.20)$$

$$(h_k - x^{1/2} g_k^\dagger) |0_- \rangle = 0, \quad (4.21)$$

$$j_k |0_- \rangle = 0. \quad (4.22)$$

Уравнение (4.22) приводит к тому, что коэффициенты μ будут отличны от нуля только для состояний, которые не содержат частиц в модах $\{z_j\}$, т.е. состояний, для которых $n_{jc} = 0$ для всех j . Уравнение (4.20) приводит к связи коэффициентов μ для состояний с m частицами в моде w_k и s частицами в моде y_k с коэффициентами μ для состояний с $m-1$ частице в моде w_k и $s-1$ частицей в моде y_k , т.е.

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

$$(m_k)^{1/2} \mu(A[m_k]; B[s_k]; 0) - x^{1/2}(s_k)^{1/2} \mu(A[(m-1)_k]; B[(s-1)_k]; 0) = 0, \quad (4.23)$$

где $\mu(A[m_k]; B[s_k]; 0)$ — коэффициент для состояния $\{n_{1a}, n_{2a}, \dots; n_{1b}, n_{2b}, \dots; 0\}$, где $n_{ka} = m$ и $n_{kb} = s$. По индукции из (4.23) видим, что

$$\mu(A[m_k]; B[s_k]; 0) = \delta_{ms} x^{m/2} \mu(A[0_k]; B[0_k]; 0). \quad (4.24)$$

Другими словами, если сравниваются состояния с одинаковым числом частиц во всех модах, за исключением мод w_k и y_k , то относительная вероятность нахождения в этих модах m и s частиц соответственно равна нулю всегда, за исключением случая $m = s$, когда она пропорциональна x^m . Можно интерпретировать это, сказав, что частицы рождаются парами в соответствующих модах w и y . Частица в m -моду попадает в черную дыру сразу после ее рождения. Частица в y -моду вылетает из черной дыры и будет уходить на бесконечность с вероятностью $|t_\omega|^2$ или отражаться назад в черную дыру с вероятностью $|r_\omega|^2$. Относительные вероятности излучения различного числа частиц в модах в точности соответствуют распределению вероятностей для теплового излучения.

Применяя (4.24) к каждому значению k , получаем

$$\mu(A; B; \eta) = \exp(-\pi k^{-1} \sum_{ja} \omega_j) \mu(0; 0; 0), \quad (4.25)$$

если $\{n_{1a}, n_{2a}, \dots\} = \{n_{1b}, n_{2b}, \dots\}$ и $\mu(A; B; 0) = 0$ в противном случае. Строго говоря, $\mu(0; 0; 0)$ равно нулю, потому что в применяемом приближении обратное влияние рожденных частиц игнорируется, и пространство-время описывается решением Шварцшильда постоянной массы. Это значит, что черная дыра излучает с постоянной скоростью бесконечное время, и поэтому вероятность излучения любого данного конечного числа частиц пренебрежимо мала. Однако если рассматривается излучение только за некоторый конечный период времени, за который масса черной дыры существенно не меняется, выражение (4.25) дает правильную относительную вероятность излучения различных конфигураций частиц. Снова видим, что вероятности излучения всех конфигураций с некоторой данной энергией равны.

Если вспомнить про угловую зависимость мод от Y_{lm} , найдем, что, поскольку (4.13) и (4.14) связывают w_ω и \bar{y}_ω , они связывают с

противоположными угловыми моментами (l, m) и $(l, -m)$. Это означает, что частицы рождаются парами в w - и y -модах с противоположным угловым моментом. Поскольку w -моды имеют зависимость от времени вида $e^{-i\omega u}$, а y -моды — вида $e^{-i\omega u}$, то в некотором смысле у них противоположные знаки энергии: y -частицы имеют положительную энергию и могут уйти на бесконечность, а w -частицы имеют отрицательную энергию и уменьшают массу черной дыры.

Рождение частиц, которое наблюдается на бесконечности, происходит потому, что наблюдатель на бесконечности разделяет моды скалярного поля так, что на горизонте событий непрерывность отсутствует и теряет всю информацию о модах внутри горизонта. Наблюдатель, который падает в черную дыру, не мог бы провести такого разрывного разделения. Вместо этого он разложил бы поле на моды, которые, напротив, непрерывны на горизонте событий. Распространяемые назад на горизонте прошлого, эти моды приобрели бы просто сдвиг на некоторый постоянный фактор и поэтому были бы еще чисто положительно-частотными по отношению к аффинному параметру U на горизонте прошлого. Таким образом, наблюдатель, падающий в черную дыру, не мог бы видеть никаких рожденных частиц.

5. ОПЕРАТОР СУПЕРРАССЕЯНИЯ \mathcal{S}

В разд. 3 было показано, что наблюдения на бесконечности будущего следует описывать в терминах оператора или матрицы плотности, а не чистого квантового состояния. Причина для этого была в том, что часть информации о квантовом состоянии системы пропадает в черной дыре. Можно подумать, что эта информация могла бы снова появиться на конечной стадии испарения и исчезновения черной дыры, так что то, что останется на бесконечности будущего, было бы чистым квантовым состоянием. Однако это не так; образование и испарение черной дыры должно происходить с несохранением информации точно так же, как и с несохранением барионного заряда. Большая черная дыра, появившаяся при коллапсе звезды и состоящая в основном из барионов, будет иметь очень низкую температуру. Поэтому она будет излучать большую часть энергии своей массы покоя в виде частиц нулевой массы покоя. Со временем черная дыра станет достаточно горячей для того, чтобы излучать барионы, но у нее останется лишь малая доля ее первоначальной массы, и энергии не хватит на то,

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

чтобы излучить такое же число барионов, какое в нее попало при ее образовании. Что касается несохранения информации, то ситуация аналогична. Черная дыра образуется при коллапсе некоторого хорошо упорядоченного тела с малой энтропией. На протяжении фазы квазистационарного излучения черная дыра выбрасывает случайное тепловое излучение с большим количеством энтропии. Для того чтобы оказаться в конце в чистом квантовом состоянии, черная дыра должна была бы излучить такое же количество отрицательной энтропии и информации в конечной стадии испарения. Однако информация типа барионного числа требует энергии, а достаточной энергии просто не имеется на конечной стадии испарения. Для передачи большого количества необходимой информации потребовалось бы излучение на конечной стадии примерно того же числа частиц, какое уже было испущено в квазистационарной фазе.

Поскольку в конце мы сталкиваемся с оператором плотности, а не с чистым квантовым состоянием, процесс образования и испарения черной дыры не может быть описан S -матрицей. Вообще говоря, и начальное состояние не будет чистым квантовым состоянием из-за испарения черных дыр в более ранние времена. Поэтому то, что имеется, есть оператор, который будет называться оператором суперрассеяния \mathcal{S} и который отображает операторы плотности, описывающие начальную ситуацию, в операторы плотности, описывающие конечную ситуацию. По принципу суперпозиции это отображение должно быть линейным. Таким образом, если мы рассматриваем начальные и конечные операторы плотности ρ_1 и ρ_2 как тензоры второго ранга или матрицы ρ_{1AB} и ρ_{2CD} в начальном и конечном гильбертовых пространствах соответственно, оператор суперрассеяния будет четырехиндексным тензором \mathcal{S}_{ABCD} , таким, что

$$\rho_{2CD} = \sum \sum \mathcal{S}_{CDAB} \rho_{1AB}. \quad (5.1)$$

Когда начальное состояние есть чистое квантовое состояние ξ_A , начальный оператор плотности будет иметь вид

$$\rho_{1AB} = \xi_A \xi_B. \quad (5.2)$$

Если начальное состояние таково, что вероятность образования черной дыры очень мала, то конечная ситуация также будет описываться чистым квантовым состоянием ζ_C , которое связано с начальным состоянием S -матрицей:

$$\zeta_C = \sum S_{CA} \xi_A. \quad (5.3)$$

Конечный оператор плотности будет

$$\rho_{CD} = \zeta_C \bar{\zeta}_D. \quad (5.4)$$

Таким образом, компоненты оператора δ на таких состояниях могут быть выражены как произведение двух S -матриц:

$$\delta_{CDAB} = \frac{1}{2} (S_{CA} S_{BD}^{-1} + S_{AD}^{-1} S_{CB}). \quad (5.5)$$

Однако для начальных состояний, которые имеют значительную вероятность образования черной дыры, S -матрицы не существует, и δ нельзя представить в виде (5.5).

Рассмотрим, например, рассеяние двух гравитонов. В этом случае начальная ситуация есть чистое квантовое состояние, и, если энергия мала, конечная ситуация также будет описываться приблизительно чистым состоянием. Это можно проверить, вычислив энтропию конечной ситуации, которую можно определить следующим образом:

$$S_2 = - \sum \sum \rho_{CD} \ln(\rho_{CD}). \quad (5.6)$$

В этом выражении логарифм следует понимать как обратную функцию по отношению к экспоненте от матрицы. Его можно вычислить, преобразуя к базису, в котором ρ_{CD} диагональна. Для энергий, при которых вероятность образования черной дыры мала, энтропия S_2 приблизительно равна нулю. Однако когда энергия гравитонов в системе центра масс возрастет до планковской массы, вероятность образования и испарения черной дыры будет значительной и энтропия S_2 будет отличной от нуля.

Тензор δ_{CDAB} эрмитов по первой и второй паре индексов. Любая матрица плотности имеет единичный след, потому что в базисе, в котором она диагональна, ее диагональные матричные элементы суть вероятности находиться в различных состояниях базиса. Так как ρ_{CD} должна иметь единичный след для любой начальной матрицы плотности ρ_{AB} , то

$$\delta_{CCAB} = \delta_{AB}. \quad (5.7)$$

Можно рассматривать это как утверждение, что, начиная с любого начального состояния, сумма вероятностей оказаться в различных конечных состояниях равна единице. Соответствующее соотношение

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

$$\sum \delta_{CDA A} = \delta_{CD} \quad (5.8)$$

означало бы, что для любого данного конечного состояния вероятности его возникновения из различных начальных состояний должны в сумме давать единицу. В пользу уравнения (5.8) будут приведены два аргумента. Первый аргумент из термодинамики, основанный на невозможности построения вечного двигателя. Второй основан на *CPT*-инвариантности.

Поскольку масса, измеряемая на бесконечности, сохраняется, оператор суперрассеяния δ будет связывать между собой только начальные и конечные состояния с одинаковой энергией. Таким образом, (5.7) будет справедливо, когда индексы начального и конечного состояния ограничены на состояния с некоторой заданной энергией E . Аналогично, если имеет место соотношение (5.8), оно также должно быть справедливо, когда ограничено на начальное и конечное состояния с энергией E . Для удобства, чтобы сделать число состояний конечным, рассмотрим состояния с энергией между E и $E + \Delta E$, заключенные в очень большой ящик с абсолютно отражающими стенками. Определим Ψ_{CD} как $\sum \delta_{CDA A}$, где суммирование идет по конечному числу состояний, указанных выше. Предположим, что

$$\Psi_{CD} \neq \delta_{CD}. \quad (5.9)$$

Вследствие соотношения (5.7), ограниченного одинаковыми состояниями, $\sum \Psi_{CC} = N$, где N — число состояний. При помощи преобразования к базису, в котором Ψ_{CD} диагональна, легко видеть, что (5.9) приводило бы к тому, что должно существовать некоторое состояние ξ_C , такое что

$$\sum \sum \Psi_{CD} \xi_C \bar{\xi}_D = \sum \sum \sum \delta_{CDA A} \xi_C \bar{\xi}_D > 1. \quad (5.10)$$

Отсюда следовало бы, что сумма вероятностей оказаться в конечном состоянии ξ_C , начиная со всех возможных начальных состояний, больше чем единица. Если теперь создать условия, при которых в ящике в течение очень большого времени сохранялась бы энергия E , то система эволюционировала бы, проходя через множество различных конфигураций. Большую часть времени ящик содержал бы частицы в приблизительно тепловом распределении. Время от времени большое число частиц скапливалось бы в маленькой области и порождало черную дыру, которая затем снова испарялась бы. В хорошем

приближении можно было бы считать, что развитие во времени матрицы плотности системы происходит при помощи последовательного применения оператора \mathcal{S} , ограниченного на конечное число состояний. При обычных предположениях о тепловом равновесии и эргодичности можно было бы ожидать, что после длительного промежутка времени вероятность нахождения системы в любом данном состоянии равнялась бы N^{-1} , а энтропия была бы $\ln N$. Однако если справедливо (5.10), вероятность системе находиться в состоянии ξ_C была бы больше, чем N^{-1} , и поэтому энтропия была бы меньше, чем $\ln N$. Можно поэтому было бы получать полезную энергию и приводить в движение вечный двигатель, позволяя системе периодически релаксировать к энтропии $\ln N$. Если предположить, что это невозможно, должно выполняться (5.8).

Второй аргумент в пользу (5.8) основан на *CPT*-инвариантности. Поскольку уравнения Эйнштейна инвариантны относительно *C*-, *P*- и *T*-преобразований по отдельности, чистая квантовая гравитация также будет инвариантна относительно этих преобразований, если граничные условия на скрытых поверхностях обладают подобной инвариантностью. Поля материи не являются с необходимостью локально инвариантными относительно *C*, *P* и *T* по отдельности, но они локально инвариантны относительно *CPT*, потому что плотность их лагранжиана является скаляром относительно локальных правильных преобразований Лоренца. Таким образом, квантовая теория взаимодействующих гравитационного поля и полей материи будет инвариантна относительно *CPT* в предположении, что граничные условия на скрытых поверхностях инвариантны относительно *CPT*. То, что граничные условия на скрытых поверхностях должны быть инвариантны относительно *CPT*, представляется вполне разумным предположением. В действительности предположение о *CPT*-инвариантности и предположении о невозможности построения вечного двигателя эквивалентны в том смысле, что из каждого из них следует другое. При наличии *CPT*-инвариантности уравнение (5.8) следует из (5.7). Поскольку черные дыры могут образовываться, и тогда, когда не существует черных дыр, образованных ранее, *CPT*-инвариантность приводит к тому, что они также должны иметь возможность испариться полностью; они не могут стабилизироваться при планковской массе, как предполагалось некоторыми авторами. *CPT*-инвариантность приводит также к тому, что наблюдатель на бесконечности не может экспериментально отличить черную дыру от белой дыры: образование и

3. НАРУШЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННОСТИ

испарение черной дыры можно с тем же успехом рассматривать при противоположном направлении времени как образование и испарение белой дыры [23]. Наблюдатель, который падает в дыру, всегда будет знать, что это черная дыра, но он будет не в состоянии сообщить результаты его измерений наблюдателю на бесконечности.

Благодарности

Автор глубоко благодарен за полезные обсуждения многим коллегам, в частности Керру, Израэлю, Пэйджу, Пенроузу и Уолду.

ЛИТЕРАТУРА

1. Roll P.J., Krotkov R., Dicke R.H., Ann. Phys., (N.Y.) **26**, 442 (1964).
2. Брагинский В.Б., Панов В.И., ЖЭТФ, **61**, 873 (1971).
3. Penrose R., Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).
4. Hawking S.W., Proc. R. Soc. London, **A294**, 511 (1966).
5. Hawking S.W., Proc. R. Soc. London, **A295**, 460 (1966).
6. Hawking S.W., Proc. R. Soc. London, **A300**, 187 (1967).
7. Hawking S.W., Penrose R., Proc. R. Soc. London, **A314**, 529 (1970).
8. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Adv. Phys., **12**, 185 (1963).
9. Лифшиц Е.М., Халатников И.М., Phys. Rev. Lett., **24**, 76 (1970).
10. Brans C., Dicke R.H., Phys. Rev., **124**, 925 (1961).
11. Trautman A., Colloques, CNRS Report N 220, 1973.
12. Hawking S.W., Nature, **248**, 30 (1974).
13. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
14. 't Hooft G., Veltman M., Ann. Inst. H. Poincaré, **20A**, 69 (1974).
15. Deser S., van Nieuwenhuizen P., Phys. Rev., **B10**, 401 (1974); **10**, 411 (1974).
16. Wald R.M., Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975).
17. Parker L., Phys. Rev., **D12**, 1519 (1975).
18. Collins C.B., Hawking S.W., Astrophys. Journ., **180**, 317 (1973).
19. Omnes R., Phys. Rep., **30**, 1 (1972).
20. Зельдович Я.Б., Старобинский А., ЖЭТФ, **61**, 2161 (1971).
21. Unruh W.G., Phys. Rev., **D14**, 870 (1976).
22. Boulware D.G., Phys. Rev., **D12**, 350 (1975).
23. Hawking S.W., Phys. Rev., **D13**, 191 (1976).

Черные дыры и термодинамика*

С.В. Хокинг

Hawking S.W.**, Phys. Rev., D13, 191 (1976)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Черная дыра с данной массой, угловым моментом и зарядом может иметь большое число ненаблюдаемых внутренних конфигураций, соответствующих возможным различным начальным конфигурациям материи, после коллапса которой получается эта дыра. Логарифм этого числа может рассматриваться как энтропия черной дыры и является мерой количества информации о начальном состоянии, которая исчезла при образовании черной дыры. Если принять гипотезу, что энтропия конечна, можно вывести, что черная дыра должна излучать тепловое излучение при некоторой ненулевой температуре. Обратно, недавно полученный квантовомеханический результат, что черные дыры действительно излучают тепловое излучение при температуре $\bar{\kappa}\hbar/2\pi k c$, где $\bar{\kappa}$ — поверхностная гравитация, позволяет доказать, что энтропия конечна и равна $s^3 A/4G\hbar$, где A — площадь поверхности горизонта событий или границы черной дыры. Поскольку черные дыры имеют отрицательную удельную теплоемкость, они не могут находиться в устойчивом состоянии теплового равновесия, за исключением случая, когда доступная дополнительная энергия не превосходит $1/4$ массы черной дыры. Это означает, что стандартный канонический ансамбль статистической механики нельзя применять, когда

*Частичная финансовая поддержка работе оказана Национальной организацией содействия развитию науки (США), договор № MPS 75-01398, Калифорнийский технологический институт.

** California Institute of Technology, Pasadena, California 91125; Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England.

©1976 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

важны гравитационные взаимодействия. Черные дыры проявляют себе полностью случайным и симметричным во времени образом и неотличимы, для внешнего наблюдателя, от белых дыр. Необратимость, которая возникает в классическом пределе, — это просто статистический эффект.

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель настоящей статьи в том, чтобы обсудить некоторые следствия недавно открытых квантовых эффектов в черных дырах. Согласно классической общей теории относительности, гравитационно коллапсирующая звезда массы M сожмется (за короткое время по измерениям наблюдателя на поверхности) до радиуса порядка $2GM/c^2$, на котором гравитационное поле становится таким сильным, что никакое дальнейшее излучение и вообще ничто не может уйти на бесконечность. Область пространства-времени, из которой невозможно уйти на бесконечность, называется *черной дырой*, а ее граница представляет собой стремящуюся наружу световую гиперповерхность, называемую *горизонтом событий*, которая не может достичь бесконечности. Наблюдателю на бесконечности будет казаться, что звезде требуется бесконечное время, для того чтобы достичь горизонта событий. Однако, как только наблюдатель примет ограниченное число фотонов, излучаемых звездой перед тем, как она пересечет горизонт событий, он увидит, что яркость звезды убывает экспоненциально с временной шкалой порядка

$$\frac{2GM}{c^3} \sim 10^{-5} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right) \text{ с.}$$

Таким образом, через несколько миллисекунд звезда эффективно исчезает, а то, что остается, представляет собой объект, который еще оказывает гравитационное влияние и который удачно назван черной дырой.

Это классическая картина, как она описана, например, у Мизнера, Торна и Уилера [1]. Однако, когда во внимание принимаются квантовые эффекты, оказывается, что "черная дыра" не полностью черная. Излучение туннелирует через горизонт событий и уходит на бесконечность с постоянной скоростью [2, 3]. (Эти результаты были подтверждены несколькими другими авторами [4 – 6].) Еще более замечатель-

но, что это излучение с постоянной скоростью оказывается имеет в точности тепловой спектр: среднее значение $\langle N \rangle$ числа частиц данного типа, излученных в виде колебаний с частотой ω , угловым моментом $m\hbar$ относительно оси вращений дыры и зарядом e , равно

$$\langle N \rangle = \Gamma \{ \exp [k^{-1} T^{-1} (\omega - m\Omega - e\Phi)] \mp 1 \}^{-1}. \quad (1)$$

В этом выражении знак « $-$ » ставится для бозонов и знак « $+$ » для фермионов. Величина Γ равна доле колебаний, которые поглощались бы при падении их на черную дыру. Температура $T = \kappa \hbar / 2\pi k c$, где κ — это *поверхностная гравитация* черной дыры. Ω — это угловая частота вращения черной дыры, а Φ — потенциал горизонта событий. Для черной дыры с массой M , угловым моментом J и зарядом Q эти величины суть

$$\kappa = \frac{4\pi(r_+ c^2 - GM)}{A}, \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{4\pi J}{MA}, \quad (3)$$

$$\Phi = \frac{4\pi Q r_+}{A}, \quad (4)$$

где

$$r_+ = c^{-2} [GM + (G^2 M^2 - J^2 M^{-2} c^2 - GQ^2)^{1/2}] \quad (5)$$

и

$$A = 4\pi G c^{-4} [2GM^2 - Q^2 + 2(G^2 M^4 - J^2 c^2 - GM^2 Q^2)^{1/2}] \quad (6)$$

— поверхность горизонта событий. Излучение описывается не чистым квантовым состоянием, а матрицей плотности. Оно полностью тепловое в том смысле, что вероятности излучения частиц в различных модах и вероятности излучения различного числа частиц ($-$) в одной и той же моде полностью некоррелированы [7]. Вероятности для различного числа частиц в точности согласуются с тепловым излучением [7 — 9].

Бекенштейн [10, 11] впервые предложил, что некоторое кратное κ должно рассматриваться как представляющее в некотором смысле температуру черной дыры. Он также отметил, что имеется соотношение

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

$$d(Mc^2) = \frac{kc^2}{8\pi G} dA + \Omega dJ + \Phi dQ, \quad (7)$$

которое связывает разность в энергиях двух близких равновесных состояний черных дыр с разностями в площади поверхности горизонта событий A , углового момента J и заряда Q . Это очень похоже на первый закон термодинамики

$$dU = TdS - PdV, \quad (8)$$

наводя на мысль, что следует рассматривать некоторое кратное A как энтропию черной дыры. Бекенштейн поэтому постулировал "обобщенный второй закон":

(Энтропия материи вне черных дыр) + (Некоторая постоянная, умноженная на сумму поверхностей горизонтов событий черных дыр) никогда не убывает.

Бекенштейн [10, 11] сумел установить справедливость этого закона в некоторых мысленных экспериментах, но поскольку он считал, что черные дыры не могут ничего излучать, он не смог получить общего доказательства, и в действительности создавалось впечатление, что могут существовать ситуации, в которых закон мог бы нарушаться. С открытием квантового теплового излучения такие нарушения больше невозможны; общее доказательство второго закона будет дано в разд. 2.

Тот факт, что температура черной дыры уменьшается, когда масса возрастает, означает, что черные дыры не могут находиться в устойчивом термодинамическом равновесии в ситуациях, когда имеется неограниченно большое количество доступной энергии. Как описано в разд. 3, это приводит к тому, что обычный канонический ансамбль статистической механики не может быть применен к гравитационным системам. Вместо этого следует применять микроканонический ансамбль, в котором рассматриваются все возможные конфигурации системы с данной энергией. В разд. 4 эта идея применена к мысленному эксперименту, в котором некоторое количество энергии заключено в ящик. Получен неожиданный вывод, что поскольку черная дыра может образоваться вследствие статистических флуктуаций в излучении черного тела и может затем распадаться квантовомеханически с обратным испусканием излучения, должен быть возможен также и обратный во времени процесс, при котором некоторое количество фотонов

или гравитонов аннигилируют, образуя *белую дыру*, которая затем взрывается, испуская излучение. Таким образом, "гипотеза космической цензуры" нарушается квантовыми эффектами.

Для внешнего наблюдателя белая дыра неотличима от черной дыры. Процесс образования и испарения дыры полностью симметричен во времени. Необратимость, которая возникает в классическом пределе, есть чисто статистический эффект.

В остальной части этой статьи будут применяться безразмерные единицы, в которых $G = c = \hbar = k = 1$. Единицей массы является тогда планковская масса $\hbar^{1/2} G^{-1/2} c^{-1/2} \sim 10^{-5}$ г. Единица длины — планковская длина $\hbar^{1/2} G^{1/2} c^{-3/2} \sim 10^{-33}$ см. Единица температуры — планковская температура $k^{-1} \hbar^{1/2} G^{-1/2} c^{3/2} \sim 10^{32}$ К.

2. ОБОБЩЕННЫЙ ВТОРОЙ ЗАКОН

Когда при гравитационном коллапсе образуется черная дыра, она очень быстро проваливается в квазистационарное состояние, характеризующееся только тремя параметрами: массой M , угловым моментом J и зарядом Q . (Это состояние является квазистационарным потому, что масса, угловой момент и заряд медленно убывают вследствие квантового излучения.) Это известно как теорема об "отсутствии волос" [13 — 19]. Черная дыра с данной массой, угловым моментом и зарядом может иметь очень большое число ненаблюдаемых внутренних конфигураций, которое отражает различные возможные конфигурации сколлапсировавшего тела. Если пренебречь квантовыми эффектами, число различных внутренних конфигураций стало бы бесконечным, потому что можно было бы образовывать черную дыру из неограниченно большого числа частиц неограниченно малой массы. Однако Бекенштейн [10] указал, что на комптоновские длины волн этих частиц следовало бы наложить ограничение, чтобы они не превосходили радиуса черной дыры, и что поэтому число внутренних конфигураций может быть конечным, хотя и очень большим.

Пусть $\sigma dM dQ d^3J$ — число внутренних конфигураций или квантовых состояний черной дыры в области от M до $M + dM$, от Q до $Q + dQ$ и угловым моментом в элементе d^3J около данного углового момента J . По теоремам об "отсутствии волос" информация о внутреннем состоянии черной дыры отсутствует, и поэтому все эти конфи-

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

гурации равновероятны. Таким образом, энтропия S_h черной дыры есть

$$S_h = -\sum p_i \ln p_i = \ln \sigma. \quad (9)$$

Можно также выразить энтропию через число начальных состояний, которые приводят к черной дыре в вышеуказанной области. Здесь имеется некоторое усложнение, заключающееся в том, что данное начальное состояние будет приводить к черной дыре только с некоторой квантовомеханической вероятностью.

Пусть $\{|\alpha_i\rangle\}$ — полный ортонормированный базис начальных состояний, и пусть $f_i \int d^3P dM dQ d^3J$ — вероятность того, что начальное состояние $|\alpha_i\rangle$ приводит только к черной дыре с параметрами в вышеуказанной области и в нормировочном объеме V с линейным импульсом в элементе d^3P около нуля. Тогда $q_i = f_i (\sum f_j)^{-1}$ есть вероятность того, что данная черная дыра возникает из начального состояния $|\alpha_i\rangle$. Энтропия равна $S_h = -\sum q_i \ln q_i$.

Энтропия S_h должна бы быть функцией только от M , J и Q со следующими свойствами:

- 1) она всегда возрастает, когда вещество или излучение падает в черную дыру;
- 2) когда две черные дыры сталкиваются и слипаются в одну, энтропия получившейся черной дыры больше чем сумма энтропий начальных дыр.

Единственной такой величиной является некоторая монотонная функция $f(A)$ с $d^2 f/dA^2 \geq 0$, где A — площадь горизонта событий. Простейшая такая функция есть γA , где γ постоянная. Бекенштейн выдвинул предположение, что γ в безразмерных единицах равна $(\ln 2)/8\pi$. (В настоящее время можно усмотреть, что правильное значение $\gamma = 1/4$.)

Для того чтобы убедиться, что гипотеза о конечном числе внутренних конфигураций самосогласована, нужно показать, что если параметры изменяются на величины ΔM , ΔJ и ΔQ вследствие аккреции вещества и излучения, новое значение σ не меньше чем старое значение, умноженное на число возможных конфигураций аккрецирующего вещества или излучения. Это эквивалентно тому, чтобы показать, что возрастание S_h больше или равно количеству энтропии в аккрецирующей материи. Другими словами, требуется доказать обобщен-

ный второй закон: $S_h + S_m$ никогда не убывает со временем (где S_m — энтропия вещества и излучения вне черной дыры).

Если энтропия системы задана как функция от энергии системы E и от различных других макроскопических параметров, можно определить температуру как $T^{-1} = \partial S / \partial E$. Таким образом, можно определить температуру черной дыры следующим образом:

$$T_h^{-1} = \left(\frac{\partial S_h}{\partial M} \right)_{J, Q} \quad (10)$$

Обобщенный второй закон тогда эквивалентен требованию, чтобы теплота не переходила от более холодной системы к более горячей.

Рассмотрим ситуацию, когда черная дыра окружена излучением черного тела при некоторой температуре T_m . Под излучением черного тела здесь понимаются все возможные виды частиц (с нулевой и ненулевой массой покоя) в тепловом равновесии, с химическим потенциалом, равным нулю. Для любой ненулевой T_m будет существовать некоторая скорость аккреции этого излучения на черную дыру. Если $T_m > T_h$, из определения температуры следует, что уменьшение S_m , вызванное аккрецирующим излучением, меньше, чем возрастание S_h . Таким образом, обобщенный второй закон выполняется. Однако, если $T_m < T_h$, аккреция этот закон нарушает. Имеется только два способа сохранить согласованность: или T_h тождественно равна нулю, в этом случае S_h бесконечна и концепция энтропии черной дыры бессмысленна, или черные дыры действительно испускают тепловое излучение с некоторой конечной ненулевой температурой. Первый случай реализуется в чисто классической теории, где черные дыры могут поглощать, но ничего не могут излучать. Бекенштейн впадает в противоречие, потому что он пытается скомбинировать гипотезу о конечной энтропии с классической теорией, но эта гипотеза имеет смысл, только если учитывается квантовомеханический результат, что черные дыры испускают тепловое излучение. Обратно, тот факт, что черные дыры испускают квантовое излучение с температурой $T_h = \kappa / 2\pi$, позволяет доказать обобщенный второй закон и поэтому установить, что энтропия черной дыры конечна. Если $T_m > T_h$, аккреция больше чем излучение, и поэтому возрастание S_h больше, чем убывание S_m , тогда как если $T_m < T_h$, то излучение больше, чем аккреция, и возрастание S_m больше, чем убывание S_h . Если аккрецирующее вещество или излучение не находится в тепловом равновесии с нулевым химическим

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

потенциалом при некоторой температуре, отношение его плотности энтропии к плотности энергии не так велико, как это было бы для излучения черного тела. Поэтому эта аккреция даже более далека от нарушения обобщенного второго закона, чем в случае, рассмотренном выше.

Квантовый результат, что температура равна $\kappa/2\pi$, позволяет проинтегрировать первый закон черных дыр [уравнение (7)] и получить, что энтропия $S_h = \frac{1}{4}A + \text{const}$. Если сделать разумное предположение, что энтропия стремится к нулю, когда масса стремится к нулю, эта константа должна быть равна нулю. Можно удивиться, почему значение энтропии не зависит от того, как много существует элементарных частиц. Например, если было бы 10^9 различных типов нейтрино, тогда можно было бы подумать, что число различных способов, которыми можно образовать черную дыру, умножилось бы приблизительно на $(10^9)^{S_h}$, и поэтому энтропия возросла бы до $S_h \ln 10^9$. Ответ состоит в том, что если бы существовало 10^9 различных типов нейтрино, черная дыра *все* их излучила бы тепловым способом, и поэтому скорость потери ею энергии сильно увеличилась бы. Это значит, что если мы хотим увеличить массу черной дыры, нам следует облучать ее нейтрино с очень большой скоростью для того, чтобы превысить излучение. Тот факт, что нейтрино должны быть поглощены за короткое время, означает, что число возможных конфигураций для них невелико. Таким образом, число способов, которыми можно увеличить массу черной дыры, не зависит от спектра элементарных частиц. Однако из многих типов труднее образовать черные дыры, потому что они быстрее излучаются. Если спектр элементарных частиц возрастает экспоненциально, как это предполагается в статистическом бутстрапе [20, 21] и в дуальных резонансных моделях сильных взаимодействий, может оказаться невозможным образование черных дыр с массой меньшей, чем приблизительно $5 \cdot 10^{13}$ г.

Особенно интересный случай аккреции и излучения — это когда сами частицы представляют собой маленькие черные дыры. Число внутренних конфигураций для черной дыры в области изменения массы от m до $m + dm$ есть

$$\int_{-m}^m \int_0^{m^2} e^{S_d Q J^2 dJ} dm \sim m^3 \exp(4\pi m^2) dm. \quad (11)$$

Скорость излучения маленьких черных дыр в этом массовом промежутке поэтому будет в такое число раз больше, чем скорость излучения единственного вида частиц массы m , которая будет описываться тепловым фактором $[\exp(8\pi m M) - 1]^{-1}$ для невращающейся дыры массы M . Таким образом, так как $M \gg 1$ и $m > 1$, скорость излучения будет пропорциональна

$$m^3 \exp[4\pi m(m - 2M)] dm. \quad (12)$$

Это показывает, что черная дыра излучает маленькие черные дыры со скоростью, которая экспоненциально мала, так как m меньше, чем M . Другими словами, вероятность квантовомеханического распада дыры на две очень мала. Классический распад полностью запрещен [13].

3. ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ

Рассмотрим черную дыру, окруженную черным излучением в большом сосуде при той же температуре, что и черная дыра. Для того чтобы находиться в состоянии теплового равновесия, черная дыра должна быть невращающейся и электрически нейтральной, так как в противном случае она будет преимущественно излучать частицы с угловым моментом и зарядом того же знака, что и у нее. Предположим, теперь, что, как результат статистической флуктуации, черная дыра поглотила несколько больше энергии, чем излучила. Поскольку черные дыры имеют отрицательную удельную теплоемкость, температура черной дыры будет понижаться. Это приведет к уменьшению скорости излучения и несколько увеличит скорость поглощения черной дыры. Если черное излучение поддерживать при постоянной температуре при помощи некоторого резервуара энергии, черная дыра будет расти неограниченно. Аналогично, если черная дыра вследствие статистической флуктуации излучила немного больше чем поглотила, скорость излучения продолжала бы увеличиваться до тех пор, пока черная дыра полностью не исчезнет. Другими словами, черные дыры не могут находиться в устойчивом тепловом равновесии с неограниченно большим резервуаром энергии. Вследствие этого нельзя применять обычный канонический ансамбль статистической механики, когда важны гравитационные взаимодействия. В каноническом ансамбле рассматривают очень большое число n одинаковых систем, свободно взаимодей-

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

ствующих между собой. Предполагается, что каждая система имеет некоторое число энергетических уровней E_i , а полная энергия всей совокупности систем имеет некоторую данную очень большую энергию E . Рассматривая всевозможные способы, которыми эта полная энергия может быть распределена среди всех различных систем, находят, что среднее число n_i систем в данном энергетическом состоянии E_i пропорционально $\exp(-E_i T^{-1})$, где T — множитель Лагранжа, который интерпретируется как температура ансамбля. Предположим теперь, что число энергетических уровней одной из систем между E и $E + dE$ есть $\rho(E)dE$. Тогда вероятность системы, имеющей энергию в промежутке от E до $E + dE$, есть $\rho(E) \exp(-ET^{-1}) dE$. В системах, которые обычно рассматривают, плотность энергетических уровней $\rho(E)$ возрастает с энергией, но не экспоненциально, так что вероятность сходится. Однако для черных дыр $\rho(E)dE$ равно числу внутренних конфигураций черных дыр с массами между $M = E$ и $M = E + dE$ и равно

$$\iint e^S J^2 dJ dQ dE \sim E^3 \exp(4\pi E^2) dE. \quad (13)$$

Это выражение растет быстрее, чем тепловой фактор $\exp(-ET^{-1})$ убывает, так что вероятность черной дыре находиться в данном массовом интервале, увеличивается с массой, а полная вероятность расходится, указывая на неприменимость канонического ансамбля. В любой системе, которая включает гравитационные взаимодействия, всегда будет существовать возможность образования черных дыр вследствие статистической флуктуации, когда множества частиц собираются вместе в маленьком пространственном объеме. Таким образом, к этим системам, строго говоря, нельзя применять концепцию канонического ансамбля.

Хотя канонический ансамбль для черных дыр не работает, еще можно применять микроканонический ансамбль большого числа одинаковых изолированных систем, каждая с данной фиксированной энергией E . Каждая из этих систем будет иметь большое число различных конфигураций, совместных с данной энергией. Эти конфигурации будут образовывать некоторую поверхность в пространстве конфигураций системы. С течением времени система будет двигаться по этой поверхности от одной точки к другой. По предположению об эргодичности, вероятность нахождения данной системы в данной области кон-

фигурационного пространства пропорциональна числу конфигураций в этой области, совместных с данной энергией.

В большинстве случаев будет существовать одно макроскопическое состояние, которое имеет много больше возможных микроскопических конфигураций, чем любое другое макроскопическое состояние. Рассмотрим, например, некоторое количество энергии E , помещенное в изолированный ящик объема V . Предположим, для простоты, что эта энергия может быть распределена только среди гравитонов и черных дыр: или вся энергия сосредоточена в гравитонах, или эта энергия разделена среди гравитонов и одной или несколькими черными дырами. Для данной энергии гравитонов E_1 число микроскопических конфигураций имеет резкий максимум, когда гравитоны имеют такое же распределение, как черное излучение при температуре

$$T_1 = \left(\frac{15 E_1}{\pi^2 V} \right)^{1/4}. \quad (14)$$

Таким образом, с хорошей точностью число конфигураций гравитонов с энергией E_1 в объеме V равно $\exp S_1$, где

$$S_1 = \frac{4\pi V T_1^3}{45} \quad (15)$$

— энтропия черного излучения при температуре T_1 . Число внутренних конфигураций черных дыр с полной энергией E_2 будет равно $\exp S_2$, где $S_2 = \frac{1}{4} \Sigma A$ — энтропия черных дыр. Сразу можно видеть, что вероятность нахождения более чем одной черной дыры очень мала, так как при заданной E_2 энтропия S_2 принимает наибольшее значение, когда имеется только одна дыра. Энтропия также максимальна, когда эта единственная черная дыра не вращается и не заряжена. Таким образом, в качестве разумной оценки для числа конфигураций черной дыры можно взять $\exp(4\pi E_2^2)$. (Можно игнорировать множитель порядка VP^3 , который возникает из-за движения черной дыры.) Полное число конфигураций для системы с энергией E_1 у гравитонов и энергией E_2 у черных дыр есть $\exp(S_1 + S_2)$. Наиболее вероятными значениями E_1 и E_2 будут те, которые приводят к максимуму $S_1 + S_2$ при наличии связи $E_1 + E_2 = E$, т.е.

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

$$1) \frac{\partial S_1}{\partial E_1} - \frac{\partial S_2}{\partial E_2} = 0,$$

$$2) \frac{\partial^2 S_1}{\partial E_1^2} + \frac{\partial^2 S_2}{\partial E_2^2} < 0.$$

Условие 1 означает $T_1 = T_2$, т.е. черная дыра имеет ту же температуру, что и гравитоны черного тела. Условие 2 означает, что

$$T_1^{-1} \frac{\partial T_1}{\partial E_1} > \frac{1}{E_2} \quad \text{или} \quad E_1 < \frac{1}{4} E_2. \quad (16)$$

Другими словами, чтобы для конфигурации, состоящей из черной дыры и гравитонов, можно было достичь максимальной вероятности, объемом V ящика должен быть достаточно мал для того, чтобы энергия E_1 чернотельных гравитонов была меньше, чем $1/4$ массы черной дыры. (Отметим, что этот результат основывается только на T^4 -зависимости плотности энергии чернотельного излучения с нулевой массой покоя, и поэтому остается справедлив, если рассмотреть вдобавок к гравитонам другие частицы с нулевой массой, такие, как фотоны и нейтрино.) Если это условие на V выполнено, то равновесие между черной дырой и чернотельным излучением при той же температуре будет устойчивым, потому что если статистическая флуктуация вызовет некоторое увеличение поглощения излучения черной дырой, то температура у излучения упадет ниже, чем у дыры, и поэтому скорость поглощения уменьшится сильнее, чем скорость излучения.

Для того чтобы посмотреть, к чему приводит это условие на V , рассмотрим предельный случай, когда $E_1 = 1/4 E_2 = 1/5 E$. Тогда $T_1 = T_2 = 5/32 \pi E$, поэтому

$$E = \left(n_b + \frac{7}{8} n_f \right) \frac{\pi^2}{15} \left(\frac{5}{32 \pi E} \right)^4 V$$

или

$$V = V_h = \frac{3 \cdot 2^{20} \pi^2 E^5}{125 \left(n_b + \frac{7}{8} n_f \right)}, \quad (17)$$

где n_b — число бозонных полей с нулевой массой, а n_f — число фермионных полей. Если $V > V_h$, то максимально вероятным состоянием будет черное излучение без всякой черной дыры. Время от времени статистические флуктуации в черном излучении будут приводить к образованию черных дыр, но они снова будут иметь тенденцию к испарению, так что большую часть времени там не будет ни одной черной дыры. Если $V_h > V > V_c \sim 64\pi E^3/3$, то наиболее вероятным состоянием будет одиночная черная дыра, окруженная чернотельным излучением при той же температуре. Статистические флуктуации будут приводить к изменению массы черной дыры, а при случае и к полному ее исчезновению. Если $V < V_c$ (объем Шварцшильда), то весь ящик будет подвержен гравитационному коллапсу, так что приведенный анализ не может быть применен.

4. БЕЛЫЕ ДЫРЫ

Рассмотрим мысленный эксперимент как в предыдущем разделе, когда некоторое количество энергии E помещается в изолированный ящик объема $V > V_c$. По эргодической гипотезе система будет проходить через все возможные конфигурации и в конечном счете потеряет всякую память об ее начальном состоянии. Это значит, что если исследуется поведение системы после большого промежутка времени, то невозможно различить направления времени; любой данный пример поведения системы должен возникать одинаково часто в обращенной во времени форме. Выше было показано, что в некоторый момент времени система могла бы состоять только из безмассовых частиц, а в другие моменты статистические флуктуации в системе этих частиц могли бы привести к образованию черных дыр, которые позднее испарились бы. Поэтому должно также возникать такое поведение, обращенное во времени; иногда должно случаться, что некоторое число безмассовых частиц аннигилируют, образуя черную дыру, обращенную во времени, — белую дыру, которая в дальнейшем взрывается, излучая безмассовые частицы.

В классической общей теории относительности считается, что существует "принцип космической цензуры", согласно которому первоначально несингулярное состояние никогда не может эволюционировать так, чтобы прийти к "голой сингулярности", т.е. сингулярности, которая не скрыта за горизонтом событий от наблюдателя на беско-

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

нечности. Этот принцип исключал бы возможность образования белых дыр в классической теории. Однако, если принять, что квантовые эффекты могут приводить к исчезновению черных дыр, то голые сингулярности должны существовать, если пытаться описывать ситуацию классической метрикой. Кроме того, обратимость во времени взаимодействующих уравнений Эйнштейна — Максвелла и нейтрино приводит к тому, что должна также быть возможна обращенная во времени ситуация, когда белая дыра образуется и затем испаряется.

Рассмотрим ящик с $V_h > V > V_c$. Во времени, направленном в будущее, будем иметь большую часть времени черную дыру, которая испускает и поглощает приблизительно чернотельное излучение и примерно с такой же скоростью. Рассматриваемая при обратном направлении времени эта система будет белой дырой, поглощающей и излучающей приблизительно чернотельное излучение и примерно с той же скоростью. Таким образом, если сделать разумное предположение, что излучение белой дыры не зависит от ее окружения, отсюда следует, что оно идет с той же скоростью, что и излучение черной дыры с такой же массой, угловым моментом и зарядом. По термодинамической интерпретации черных дыр процессы образования и испарения черной дыры являются статистически обратимыми во времени друг по отношению к другу. То есть, черная дыра может быть образована из гравитонов, фотонов и нейтрино любым из множества различных способов, причем наибольшее число возможностей возникает, когда частицы имеют примерно температурное распределение. Аналогично, процесс испарения будет приводить к любой из большого числа различных конечных конфигураций, причем это число будет наибольшим, когда излучение является приближенно тепловым. Вместе с предыдущим результатом это означает, что черные и белые дыры одинаковы для внешнего наблюдателя. Существует общий принцип, что физическая теория не должна содержать элементов, которые не являются физически измеримыми, и не должна по разному описывать ситуации, которые нельзя различить с помощью наблюдений. В классической общей теории относительности имеется единственная пространственно-временная метрика, которая различна для черных и для белых дыр. Однако, если пространство-время квантованно, приходится отказаться от идеи о единственной пространственно-временной метрике точно так же, как в специальной теории относительности отказались от идеи

об абсолютном времени, которое не зависело от наблюдателя. Причина этого в том, что для того чтобы определить местоположение в пространстве-времени, нужно измерить метрику, а такой акт измерения помещает нас на одну из множества различных ветвей волновой функции в интерпретации квантовой механики Уилера — Эверетта [22]; если описывать пространство-время некоторой разновидностью фейнмановского интеграла по метрикам, то метрики, которые включены в интеграл, будут зависеть от ситуации; которую желают описать, которая в свою очередь будет зависеть от измерений, которые производятся. Наблюдатель, который проводит измерения, находясь сам вне дыры, может использовать метрику как для белой, так и для черной дыр. В метрике черной дыры аккрецирующие частицы будут падать в сингулярность, тогда как излученные частицы будут представляться рожденными где-то вне горизонта событий. В метрике белой дыры аккрецирующие частицы будут казаться аннигилируемыми гравитационным полем, в то время как излученные частицы будут представляться уходящими из сингулярности в прошлое. Наблюдатель, который производит измерения, падая внутрь дыры, не увидит излученных частиц [3, 7] и будет использовать только метрику черной дыры. Подобным образом в весьма невероятном случае черной дыры, порождающей и излучающей наблюдателя, он мог бы рассматривать себя, как вылетающего из белой дыры, и мог бы использовать метрику белой дыры.

В другой статье [7] показано, что процесс образования и испарения дыры не может быть описан S -матрицей. Причина этого в том, что не существует поверхности Коши в будущем. То, что уходит на бесконечность, не полностью определяет состояние системы, потому что это состояние зависит также от того, что упало в дыру. В результате при помощи измерений на бесконечности будущего нельзя определить чистое квантовое состояние системы, но только матрицу плотности, которая описывает вероятности различных комбинаций излученных частиц. Вместо S -матрицы имеется новая величина, названная оператором суперрассеяния, который отображает матрицы плотности, описывающие начальную ситуацию, в матрицы плотности, описывающие конечную ситуацию [7]. Этот оператор будет инвариантен относительно CPT -оператора Θ , т.е. вероятность перехода от начальной матрицы плотности ρ_1 к конечной матрице плотности ρ_2

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

будет равна вероятности перехода от $\Theta_{r_2}\Theta^{-1}$ к $\Theta_{r_1}\Theta^{-1}$. Оператор суперрассеяния обеспечивает для наблюдателей на бесконечности описание, которое удовлетворяет отмеченному выше принципу, — он не делает экспериментально непроверяемого различия между черными и белыми дырами.

Изображение белых дыр, которое обычно применялось до сих пор, — это обращенный во времени коллапс облака пыли. Белая дыра ничего не излучает до некоторого момента времени, а затем внезапно выбрасывает облако материи. Такую картину критиковал Зельдович (см. [23]), отметив, что не следует ждать неизлучающей фазы, потому что там будет происходить рождение пар в сильном гравитационном поле вблизи сингулярности. Вывод данной статьи очень близок точке зрения Зельдовича: белая дыра непрерывно испускает тепловое излучение. Это испускание полностью случайное, и все возможные конфигурации излученных частиц равновероятны. (Все конфигурации не уходят на бесконечность с равной вероятностью, потому что вокруг дыры имеется потенциальный барьер, который зависит от углового момента и т.д. частиц и который может отразить частицы назад в дыру.) На самом деле возможно, что белая дыра ничего не будет излучать до некоторого момента, а затем выбросит облако пыли, но число возможных конфигураций, которые представляли бы такую ситуацию, — мало. Гораздо более вероятно, что белая дыра испускает тепловое излучение, потому что этому соответствует гораздо больше конфигураций.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вывод данной статьи заключается в том, что имеется тесная связь между дырами (черной и белой) и термодинамикой, которая возникает вследствие потери информации в дыре. Если принять гипотезу, что максимальное количество информации, которое может исчезнуть в дыре с данной массой, угловым моментом и зарядом, конечно, отсюда следует, что дыре можно сопоставить некоторую энтропию и можно вывести, что она должна испускать тепловое излучение при некоторой конечной ненулевой температуре. Обратно, квантовомеханический результат, а именно то, что черные дыры испускают тепловое излучение с температурой $T_h = \kappa/2\pi$, позволяет доказать выше-

указанную гипотезу и вычислить энтропию $S_h = A/4$. Из того, что черные дыры имеют отрицательную удельную теплоемкость, следует, что они могут находиться в устойчивом тепловом равновесии, только когда количество доступной энергии некоторым способом ограничено. Рассмотрение теплового равновесия или обратимости во времени уравнений приводит к выводу, что черные дыры неотличимы для внешнего наблюдателя от белых дыр и ведут себя симметричным во времени образом. Необратимость, связанная с классическими черными дырами, есть просто статистический эффект. Например, в классической теории две черные дыры могут слиться, но черная дыра никогда не может раздвоиться. Соответствующий результат в квантовой теории состоит в том, что существует большая вероятность слияния двух черных дыр в одну, потому что при этом происходит переход от состояния с меньшим числом конфигураций к состоянию с большим числом конфигураций, но вероятность обратного процесса мала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Misner C.W., Thorne K.S., Wheeler J.A., Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973. (Имеется перевод: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, "Мир", 1977.)
2. Hawking S.W., Nature, **248**, 30 (1974).
3. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
4. De Witt B.S., Phys. Rep., **19C**, 295 (1975).
5. Gerlach U.H., Phys. Rev., **D14**, 1479 (1976).
6. Boulware D.G., Phys. Rev., **D13**, 2169 (1976).
7. Hawking S.W., Phys. Rev., **D14**, 2460 (1976).
8. Wald R.M., Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975).
9. Parker L., Phys. Rev., **D12**, 1519 (1975).
10. Bekenstein J.D., Phys. Rev., **D7**, 2333 (1973).
11. Bekenstein J.D., Phys. Rev., **D9**, 3292 (1974).
12. Bardeen J.M., Carter B., Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **31**, 161 (1973).
13. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **25**, 152 (1972).
14. Israel W., Phys. Rev., **164**, 1776 (1967).
15. Carter B., Phys. Rev., Lett., **26**, 331 (1970).
16. Hawking S.W., Ellis G.F.R., The large scale structure of spacetime Cambridge University Press, London, 1973. (Имеется перевод: С.В. Хо-

4. ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ И ТЕРМОДИНАМИКА

кинг, Дж. Ф.Р. Иллс, Крупномасштабная структура пространства-времени, "Мир", 1977.)

17. *Muller zum Hagen H., Robinson D.C., Seifert H.J.*, Gen. Relativ. Gravit., **4**, 53 (1973).
18. *Robinson D.C.*, Phys. Rev., **D10**, 458 (1974).
19. *Robinson D.C.*, Phys Rev. Lett., **34**, 905 (1975).
20. *Hagedorn R.*, в книге Cargese Lectures in Physics, vol. 6, ed. by E. Schatzman, Gordon and Breach, New York, 1973.
21. *Frautschi S.C.*, Phys. Rev., **D3**, 2821 (1971).
22. *Everett H.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 454 (1957).
23. Зельдович Я.Б., Новиков И.Д., Старобинский А.А., ЖЭТФ, **66**, 1897 (1974).

Статья 5

Вывод излучения от черной дыры с помощью метода интегрирования по путям

Дж.Б. Хартль, С.В. Хокинг

Hartle J.B.*, Hawking S.W.***, Phys. Rev., D13, 2188 (1976)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Используется метод интегрирования по путям Фейнмана для построения квантовой механики скалярной частицы, движущейся в гравитационном поле черной дыры, описываемом геометрией Шварцшильда. Амплитуда вероятности излучения черной дырой скалярной частицы в некотором состоянии представлена в виде суммы по путям, соединяющим сингулярность в будущем и бесконечность. С помощью аналитического продолжения в комплексном пространстве Шварцшильда эта амплитуда связывается с амплитудой вероятности распространения частицы от сингулярности в прошлом к бесконечности, и, следовательно, используя обращение во времени, ее можно связать с амплитудой вероятности поглощения черной дырой частицы в том же самом состоянии. Соотношение между вероятностями излучения и поглощения показывает, что шварцшильдовская черная дыра излучает скалярные частицы с тепловым спектром и характерная температура связана с ее массой M следующим образом: $T = \hbar c^3 / 8\pi G M k$. Таким образом, из первых принципов получен простой вывод излучения черной дыры. Обсуждается обобщение этого результата на случай полей с другими спинами и других геометрий, описывающих гравитационное поле черной дыры.

* Department of Physics, University of California, Santa Barbara, California 93106. California Institute of Technology, Pasadena, California 91125.

** Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England; California Institute of Technology, Pasadena, California 91125.

© 1976 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

1. ВВЕДЕНИЕ И КРАТКИЙ ОБЗОР

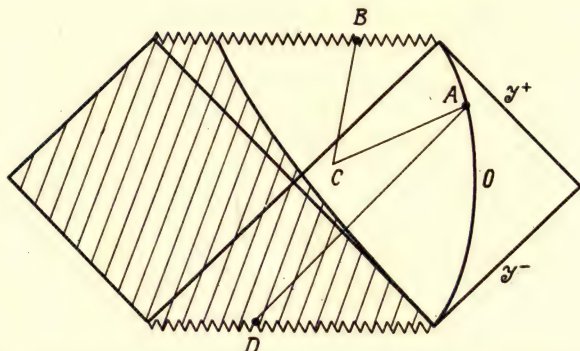
Метод интегрирования по путям Фейнмана [1] дает естественный подход к формулировке квантовой механики материальных полей, распространяющихся в искривленном пространстве-времени [2 – 4]. В этом подходе амплитуда $K(x, x')$ вероятности распространения частицы из одной точки пространства-времени x в другую x' выражается в форме интеграла по всем возможным путям, соединяющим эти две точки. Интеграл имеет вид

$$K(x, x') \sim \sum_{\text{по путям}} e^{iS(x, x')/\hbar}, \quad (1.1)$$

где $S(x, x')$ – классическое действие, вычисленное для определенно-го пути, соединяющего x' и x . Амплитуду K называют пропагатором.

Эта формулировка квантовой механики обладает рядом преимуществ. Поскольку сумма вычисляется по траекториям в четырехмерном пространстве и поскольку S является четырехмерным скаляром, выражение для K явно ковариантно. Выражение пропагатора в виде суммы по путям позволяет дать ему непосредственную физическую интерпретацию. Так как пропагатор непосредственно представлен в виде функционального интеграла, то проблема получения его приближенного вида немедленно сводится к проблеме приближенного вычисления функционального интеграла. По этим причинам метод интегрирования по путям Фейнмана заманчиво использовать как подход к построению квантовой механики в искривленном пространстве-времени. В данной статье мы используем метод интегрирования по путям для вывода теплового излучения от черных дыр [5]. Ниже мы в общих чертах обрисуем наши методы и результаты. Детали и доказательства будут даны в следующих разделах.

На фиг. 1 изображена диаграмма Пенроуза для шварцшильдовской геометрии. Незаштрихованная часть диаграммы изображает геометрию вне сферически-симметричного коллапсирующего тела. Заштрихованную часть следует заменить внутренней геометрией. Рассмотрим теперь вероятность того, что частица испущена черной дырой и зарегистрирована наблюдателем, расположенным на постоянном расстоянии вдали от черной дыры, в виде локализованной возле некоторой точки A положительно-частотной моды при условии, что в отдален-



Ф и г. 1. Незаштрихованная часть диаграммы соответствует геометрии Шварцшильда вне сферически-симметричного коллапсирующего тела. Линия O является мировой линией наблюдателя, находящегося на постоянном радиусе вне черной дыры. Нестационарный путь BCA соответствует рождению частицы черной дыры. Пара частиц рождается около точки C . Одна из них падает на сингулярность в будущем около точки B , в то время как другая вылетает наружу к наблюдателю и регистрируется в момент A . Амплитуда вероятности рождения частицы черной дырой и регистрации ее наблюдателем в определенном состоянии в поздние моменты времени можно выразить в виде интеграла от амплитуды вероятности распространения из точки B , лежащей на сингулярности в будущем, в точку A на мировой линии наблюдателя. В свою очередь этот пропагатор можно выразить в виде суммы по путям, соединяющим точки A и B . Продолжая аналитически точку B в комплексное пространство Шварцшильда, можно связать амплитуду вероятности распространения из некоторой действительной точки B на сингулярности в будущем в точку A с амплитудой вероятности распространения из отраженной точки D , лежащей на сингулярности в прошлом в ту же точку A . Соответствующий процесс представляет собой обращение во времени процесса поглощения частицы черной дырой. Таким образом, можно связать вероятность излучения скалярной частицы черной дырой с вероятностью ее поглощения. Эта связь приводит к тепловому излучению.

ном прошлом отсутствовали падающие частицы. Эту вероятность можно связать с амплитудой вероятности распространения от некоторой точки на сингулярности в будущем к точке наблюдения A . Ее в свою очередь можно представить как сумму по путям вида (1.1), где пути, по которым производится суммирование, начинаются в точке B на сингулярности в будущем и оканчиваются в точке наблюдения C . Подобный типичный путь (BCA) показан на фиг. 1. Эти пути в точности совпадают с путями, соответствующими паре рождающихся (около C) частиц, одна из которых падает в черную дыру, а другая вылетает наружу к наблюдателю. В рассматриваемую сумму не включены пути,

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

которые начинаются на \mathcal{I}^- , так как они отвечали бы распространению падающих частиц в отдаленном прошлом. В нее также не включены пути, проходящие через заштрихованную область, так как ее следует заменить внутренней метрикой коллапсирующей звезды и (как мы далее покажем более подробно) она не будет давать вклада в рождение частиц в поздние моменты времени. Мы рассматриваем только распространение от сингулярности в будущем.

Если попытаться оценить вероятность рождения, применяя для вычисления рассматриваемых интегралов метод стационарной фазы, то легко обнаружить, что действительные стационарные пути, соединяющие сингулярность в будущем с положительночастотной модой, для стационарного внешнего наблюдателя, отсутствуют. Подобные пути, казалось бы, являются допустимыми классическими траекториями для частицы с положительной энергией, соединяющими эти две поверхности, но таких путей нет (для частиц с отрицательной энергией подобные классические траектории существуют.) Однако если координаты точки B на сингулярности в будущем сделать комплексными, то можно найти стационарные пути. Оказывается, что эти пути лежат в действительном многообразии и соединяют сингулярность в прошлом с внешним наблюдателем. Таким образом, можно связать амплитуду вероятности распространения от точки B на сингулярности в будущем к внешнему наблюдателю и амплитуду вероятности распространения от соответствующей точки D на сингулярности в прошлом. В свою очередь вследствие симметрии по отношению к обращению времени модуль этой амплитуды совпадает с модулем амплитуды вероятности распространения от обращенной по времени точки A к точке на сингулярности в будущем, соответствующей обращению во времени точки D . Это показывает, что посредством соответствующего сдвига контура интегрирования в плоскость комплексных координат можно связать амплитуды вероятности испускания и поглощения частиц черной дырой. Для амплитуды вероятности излучения черной дырой частиц в определенной моде с энергией E , измеренной удаленным наблюдателем, эта связь имеет вид

$$\left(\begin{array}{c} \text{Вероятность испускания} \\ \text{частицы с энергией } E \end{array} \right) = e^{-2\pi E/\kappa} \times \left(\begin{array}{c} \text{Вероятность поглощения} \\ \text{частицы с энергией } E \end{array} \right), \quad (1.2)$$

где κ — поверхностная гравитация черной дыры для шварцшильдовской черной дыры $\kappa = \frac{1}{4}M$. (Здесь и далее мы используем систему единиц,

в которой $\hbar = c = G = 1$.) Эта связь между излучением и поглощением имеет именно такой вид, который необходим для вывода результата работы [5], состоящего в том, что шварцшильдовская черная дыра излучает частицы с тепловым спектром с температурой $T = \kappa/2\pi k$. Чтобы убедиться в этом, представим себе, что черная дыра помещена в термостат, температура которого T регулируется таким образом, чтобы вся система находилась в равновесии. Температура излучения в термостате в этом случае совпадает с температурой черной дыры. В равновесии скорость испускания частиц черной дырой должна в точности совпадать со скоростью поглощения. Поскольку отношение вероятности нахождения в термостате N фотонов в определенной моде с энергией E к вероятности нахождения $N - 1$ фотона в той же самой моде равно $\exp(-E/kT)$, то условие равновесия выполняется, когда $T = \kappa/2\pi k$.

В дальнейшем мы рассмотрим этот простой аргумент более подробно. В разд. 2 квантовая механика скалярных частиц, движущихся на фоне шварцшильдовской геометрии, сформулирована в терминах интегрирования по путям. Разд. 3 содержит вывод необходимых аналитических свойств пропагатора на комплексифицированном многообразии, и в разд. 4 выводится тепловое излучение от шварцшильдовской черной дыры. В разд. 5 обсуждается обобщение на случай рейснер-нордстремовской и керровской черных дыр и на случай частиц с высшим спином.

2. КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ В ШВАРЦШИЛЬДОВСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРЕДСТАВЛЕНИИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ПУТЯМ

Здесь мы сформулируем квантовую механику скалярной частицы, движущейся в искривленном пространстве в терминах интегралов по путям Фейнмана. Настоящая работа является обобщением и интерпретацией работы Фейнмана о скалярном поле в плоском пространстве [7], и до тех пор, пока речь идет об общей формулировке метода интегралов по путям в искривленном пространстве, мы будем тесно следовать более ранним работам де Витта [2, 3]. Цель этого раздела состоит в том, чтобы обосновать определение пропагатора, которое будет дано в разд. 3, как решения неоднородного скалярного волнового уравнения с определенными граничными условиями. Поэтому

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

в настоящем разделе мы не будем постоянно стремиться к математической точности, впрочем, при работе с интегралами по путям это обычная ситуация.

Траекторию скалярной частицы в пространстве-времени можно описать, если задать ее четыре координаты x^α как функции от параметра времени w . Используя обозначение x для всех четырех координат, можно записать уравнение траектории в виде $x = x(w)$. Предположим, что мы рассматриваем движение частицы из точки пространства-времени x' при $w = 0$ в точку x при $w = W$. Функционал действия, описывающий классическое движение подобной частицы, есть

$$S[x(w)] = \frac{1}{4} \int_0^W dw g(\dot{x}, \dot{x}), \quad (2.1)$$

где g — метрика искривленного пространства-времени и \dot{x} обозначает касательный вектор, компоненты которого равны dx^α/dw . Путь, отвечающий экстремуму действия S , удовлетворяет уравнению геодезической, причем w является аффинным параметром. Поэтому для времениподобных путей в качестве w можно взять параметр собственного времени, умноженный на некоторую константу, в то время как для пространственноподобных путей параметр w можно положить равным собственному расстоянию, умноженному на ту же константу.

Функционал действия (2.1) не совпадает с обычным функционалом действия, в котором под интегралом стоит величина $[-g(\dot{x}, \dot{x})]^{1/2}$. Однако выражение (2.1) вполне пригодно для классического действия; будучи квадратичным по четырехмерным скоростям, оно обладает очевидными преимуществами при рассмотрении метода интегрирования по путям (см. приложение). В отличие от обычной формы действие (2.1) аналитически продолжается от времениподобных к пространственноподобным путям. Кроме того, оно приводит к правильной квантовой механике скалярных частиц в плоском пространстве-времени и, следовательно, является естественным обобщением на случай искривленных пространств. Мы не будем больше здесь обсуждать другие возможные выборы действия.

Основное предположение метода интегрирования по путям Фейнмана состоит в том, что амплитуда вероятности распространения частицы вдоль определенного пути в пространстве-времени пропорциональна $\exp \{iS[x(w)]\}$. Чтобы иметь более ясное представление о том, что

это означает, представим себе, что вся область изменения параметра w разделена на много малых интегралов точками w_i . Амплитуда вероятности того, что наблюдения положений в пространстве-времени при *каждом значении* параметра времени w_i дают множество величин $\{x_i = x(w_i)\}$, пропорциональна $\exp\{iS[x(w)]\}$ в пределе, когда интервалы деления становятся бесконечно малыми. Амплитуды вероятности для более ограниченных множеств наблюдения можно построить, суммируя эту амплитуду по ненаблюдаемым положениям. Например, амплитуда вероятности того, что наблюдение пространственно-временного положения частицы при одном значении параметра времени дает x' , а при другом измерении, соответствующем более позднему параметру времени W , дает значение x , равна

$$F(W, x, x') = \int \delta x[w] \exp \left[\frac{i}{4} \int_0^W g(\dot{x}, \dot{x}) dw \right]; \quad (2.2)$$

здесь интегрирование ведется по всем ненаблюдаемым положениям частицы при параметре времени, заключенном между 0 и W . Другими словами, этот интеграл является функциональным интегралом по всем путям, удовлетворяющим условиям $x(0) = x'$ и $x(W) = x$.

Параметр w был введен как наблюдаемая, выполняющая роль, аналогичную обычному времени в нерелятивистской квантовой механике¹⁾. Однако эксперимента, в котором можно было бы непосредственно ее наблюдать, не существует (так как частицы не несут на себе часов). Все физические наблюдения можно получить, зная амплитуду вероятности $K(x, x')$ локализации частицы в двух пространственно-временных точках x' и x . Функция $K(x, x')$ называется пропагатором. Эту амплитуду можно получить в два этапа: суммируя сначала по всем путям, соединяющим x' с x при данном значении параметра времени W , а затем суммируя²⁾ по ненаблюдаемой

¹⁾ Дальнейшее обсуждение метода собственного времени в релятивистской квантовой механике можно найти в работах [8 - 11].

²⁾ Можно было бы думать, что параметр времени W , который для временноподобных кривых пропорционален собственному времени, полностью определяется точками x и x' и выбором пути, а не является величиной, задаваемой независимо. Однако это верно только в случае дифференцируемых путей, а суммирование проводится также и по недифференцируемым путям. Ситуация аналогична той, которая имеет место в нерелятивистской квантовой механике, где можно поставить вопрос о нахождении амплитуды распространения из точки пространства x в точку пространства x' вдоль данного пути в определенный момент времени t . Если бы путь был дифференци-

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

переменной W . Первая сумма совпадает с функцией F [см. (2.2)]. Во второй сумме каждому текущему значению параметра времени W следует приписать соответствующий вес. В плоском пространстве, если скалярная частица обладает массой покоя m , этот вес равен [7] $i \exp(-im^2 W)$. Естественно принять это и для случая искривленного пространства. Тогда выражение для пропагатора принимает вид¹⁾

$$K(x, x') = i \int_0^\infty dW \exp(-im^2 W) F(W, x, x'), \quad (2.3)$$

где F дается выражением (2.2). Интегрирование ведется только по положительным значениям W , что соответствует требованию, чтобы частицы всегда двигались только вперед по параметру времени.

Используя это определение, легко показать, что функция $K(x, x')$ симметрична по x и x' . Если положить $w = W - w'$, то действие (2.1) не изменяется, а x и x' меняются местами, поскольку если рассматривать их как функции от w' , то $x(0) = x$, $x(W) = x'$. Поэтому $F(W, x, x')$ симметрично по x и x' , и из (2.3) немедленно следует, что аналогичной симметрией обладает и $K(x, x')$.

Уравнения (2.2) и (2.3) являются основными соотношениями, которые необходимы для построения квантовой механики свободной скалярной частицы в искривленном пространстве-времени. Прежде чем завершить это построение, требуется придать смысл интегралам, входящим в эти соотношения. Мы переходим теперь к рассмотрению этого вопроса, однако для простоты и определенности ограничимся случаем скалярных частиц, движущихся в шварцшильдовской геометрии.

Первая проблема состоит в определении интеграла по путям (2.2). Для ее решения аналитически продолжим переменные в этом формальном выражении к значениям, при которых интеграл хорошо определен. В частности, продолжим w и W до отрицательных мнимых величин $-i\omega$ и $-i\Omega$ соответственно, а координаты продолжим в область, где метрика имеет сигнатуру $+4$. В случае шварцшильдовской геометрии, которая в координатах z, y, θ и ϕ описывается метрикой

$$ds^2 = (32 M^3 e^{-r/2M}/r) (-dz^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.4)$$

руем, то t было бы определено, однако в интеграле Фейнмана для пропагатора суммирование ведется по путям, не обладающим свойством дифференцируемости.

¹⁾ Это определение $K(x, x')$ соответствует I_+ работы [7] и Δ_F книги [12].

где $d\Omega^2 = d\theta + \sin^2\theta d\varphi^2$ и $r(y, z)$ определяется соотношением

$$-z^2 + y^2 = (r/2M - 1)e^{r/2M}; \quad (2.5)$$

этого можно добиться, полагая $z = i\zeta$ и считая ζ действительной величиной. Аналитически продолженная метрика γ дается элементом длины

$$d\sigma^2 = (32M^3 e^{-r/2M}/r) (d\zeta^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.6)$$

где r определяется теперь соотношением

$$\zeta^2 + y^2 = (r/2M - 1)e^{r/2M}. \quad (2.7)$$

Аналитически продолженное выражение для F становится равным

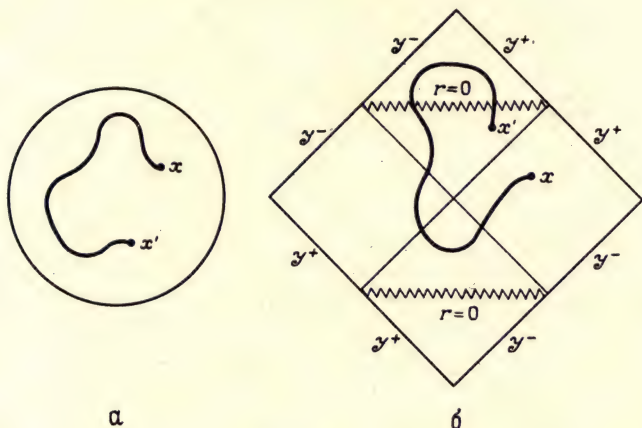
$$F(\Omega, x, x') = \int \delta x[\omega] \exp \left[-\frac{1}{4} \int_{\Omega} \gamma(\dot{x}, \dot{x}) d\omega \right], \quad (2.8)$$

где x соответствует $x^\alpha = (\zeta, y, \theta, \varphi)$, а $\dot{x} = dx^\alpha/d\omega$. Покрываемое при изменении координат $-\infty < \zeta < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ пространство является полным и имеет топологию $R^2 \times S^2$, и так как r при этом имеет значения, превосходящие $2M$, то метрика γ регулярна везде, за исключением тривиальных полярных особенностей при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Интегрирование теперь распространяется на все пути в этом пространстве, начинающиеся при $\omega = 0$ в x' и оканчивающиеся при $\omega = \Omega$ в x (фиг. 2, а). Этот интеграл по путям может быть строго определен [13, 14]. Наше основное предположение¹⁾ состоит в том, что функция F , определенная таким образом и аналитически продолженная обратно к действительным значениям координат и параметра временной переменной, дает правильный пропагатор, эвристически определяемый уравнением (2.2).

При этой процедуре не только интеграл (2.2) приобретает определенный смысл, но и определяется класс путей, по которым ведется интегрирование. Предположим, что мы выбрали определенный путь в пространстве с положительно определенной метрикой, и продолжим как координаты, так и параметр в комплексную плоскость. Комплексный путь является теперь двумерной поверхностью в пространстве

¹⁾ Это условие аналогично "постулату евклидовости" в евклидовой квантовой теории поля. См., например, [15, 16].

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ



Ф и г. 2.

а. Компактификация сечения $\theta = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ пространства-времени с положительно определенной метрикой, описываемой формулой (2.6). Окружность, изображенная сплошной линией, соответствует бесконечности. Сингулярности отсутствуют. Показан типичный путь, соединяющий точки x' и x .
 б. Диаграмма Пенроуза для геометрии Шварцшильда, на которой изображены также области с отрицательной массой (или $r \leq 0$), расположенные выше и ниже сингулярностей. Здесь показан типичный представитель класса путей, получающихся на этом действительном сечении при аналитическом продолжении из пространства-времени с положительно определенной метрикой, изображенного на фиг. 2,а. Подобные пути могут пересекать туда и обратно сингулярность при $r = 0$. Интегрирование по путям, пересекающим сингулярности доопределяется посредством выбора контуров интегрирования, совпадающих с аналитическим продолжением контуров в сечение с положительно определенной метрикой.

комплексных координат, определяемой четырьмя комплексными аналитическими функциями $x(\omega)$ от комплексного параметра ω . Эти аналитические функции полностью определяются своими действительными значениями для действительных ω . Как выглядит определенный выше класс путей, когда при аналитическом продолжении достигаются действительные значения W и контуры интегрирования по путям деформируются к действительным значениям координат? Очевидно, что класс путей, возникающий в результате этой процедуры, не будет находиться внутри какой-либо области, граница которой конечна в координатах Крускала. В частности, эти пути будут пересекать туда и обратно особенности при $r = 0$. Эти особенности являются полюсами в метрике, рассматриваемой как функции от комплексных

координат. Интеграл по путям, пересекающим особенность, доопределяется предписанием, каким образом контур интегрирования обходит полюс. Это в свою очередь определяется аналитическим продолжением пути от сечения с положительно определенной метрикой и деформацией контура к действительным значениям везде, кроме окрестности $r = 0$. Если пути пересекают $r = 0$, то они продолжаются в геометрии Шварцшильда с отрицательной массой. Схематически это проиллюстрировано на фиг. 2, б.

Реальное вычисление функции $F(\Omega, x, x')$ существенно упрощается, если заметить, что она удовлетворяет параболическому дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = \tilde{\square}^2 F, \quad (2.9)$$

где $\tilde{\square}^2 = \gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta$ и $\tilde{\nabla}_\alpha$ обозначает ковариантное дифференцирование по отношению к метрике γ . Вывод этого результата см. в приложении. Чтобы уравнение (2.9) определяло функцию F , совпадающую с функцией, определяемой интегралом по путям, его следует дополнить граничными условиями. Пусть первое из них

$$F(0, x, x') = \delta(x, x'), \quad (2.10)$$

где $\delta(x, x')$ — четырехмерная δ -функция в пространстве с положительно определенной метрикой [равная $\delta^4(x - x')\gamma^{-1/2}$]. Второе — это условие убывания F при стремлении x к бесконечности в пространстве с положительно определенной метрикой. Первое граничное условие есть просто требование локализации частицы в точке x' при Ω . Второе условие вытекает из экспоненциального убывания интеграла при стремлении x к бесконечности.

Решение уравнения (2.8) и соответствующие граничные условия будут аналитическими по x везде, где аналитична метрика, и аналитическими по Ω везде вне начала [17]. Решение, таким образом, можно продолжить обратно к физическим значениям координат и параметра времени. При этом оно будет удовлетворять аналитически продолженному уравнению

$$i \frac{\partial F}{\partial W} = -\square^2 F, \quad (2.11)$$

где $\square^2 = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta$ и ∇_α — ковариантное дифференцирование по от-

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

ношению к метрике g . Уравнение (2.11) можно рассматривать как уравнение Шредингера для распространения по параметру времени W .

Вторая проблема состоит в том, чтобы придать смысл соотношению (2.3), поскольку пропагатор является интегралом по W . Чтобы решить ее, нам потребуется асимптотическое выражение для $F(W, x, x')$ как при малых, так и при больших значениях W . Поведение $F(W, x, x')$ при малом значении W по существу следует из самого определения интеграла по путям. При малом W и фиксированных x и x' действие (2.1) для типичного пути становится большим. Единственными путями, дающими существенный вклад в интеграл по путям, являются стационарные траектории, т.е. геодезические, соединяющие x и x' . Для этих путей действие равно

$$S(W, x, x') = \frac{1}{4} s(x, x')/W, \quad (2.12)$$

где $s(x, x')$ — квадрат геодезического расстояния между x и x' . Если бы существовала только одна геодезическая, соединяющая x и x' , то при малых значениях W мы могли бы записать

$$F(W, x, x') = \exp[is(x, x')/4W] N(W, x, x'),$$

где $N(W, x, x')$ — действительный нормировочный множитель. Можно теперь решить уравнение (2.11) и найти поведение N при малых W . Если принять во внимание тождество

$$(\nabla_\alpha s)(\nabla^\alpha s) = 4s, \quad (2.13)$$

то найдем

$$N(W, x, x') = D(x, x')W^{-2} + \dots, \quad (2.14)$$

где D не зависит от W ; явный вид D нам не потребуется. Читатель может узнать в этом выражении по сути дела ВКБ-приближение к решению уравнения (2.11). Значительно более подробный вывод можно найти в работах [2] и [11].

В общем случае имеется несколько геодезических, соединяющих x и x' , и поведение F при малых W будет иметь вид

$$F(W, x, x') = \sum_c e^{is_c(x, x')/(4W)} W^{-2} [D_c(x, x') + O(W)], \quad (2.15)$$

где суммирование ведется по каждому классу геодезических, соединяющих x и x' . Это поведение при малых W не будет справедливо рав-

номерно на всей области изменения x . В частности, когда соседние геодезические, выходящие из точки, пересекаются (каустика), можно ожидать, что это приближение перестанет быть справедливым. Например, $s(x, x')$ будет иметь точку ветвления при таком пересечении, а мы из общих соображений знаем, что точки ветвления у функции F отсутствуют.

Если проинтегрировать соотношение (2.15) с гладкой функцией от x , тогда при стремлении W к нулю существенный вклад в интеграл дадут только такие значения x , для которых значение $s_c(x, x')$ при фиксированном x' является близким к стационарному. Это имеет место только для x , близких к x' . Другими словами, функция $F(0, x, x')$ пропорциональна δ -функции. Коэффициент пропорциональности равен единице, так как нормировочные множители в (2.15) также должны приводить к (2.10). Следовательно,

$$\lim_{W \rightarrow 0} F(W, x, x') = \delta(x, x'). \quad (2.16)$$

Для больших значений Ω стандартные оценки [17] для решений параболического уравнения (2.9) с граничным условием (2.10) показывают, что функция $F(\Omega, x, x')$ при фиксированных x и x' убывает не медленнее, чем Ω^{-2} . С точки зрения физики это не что иное как распыление первоначально локализованного волнового пакета при возрастании Ω . Следовательно, при больших Ω функцию F можно представить в виде

$$F(\Omega, x, x') = \Omega^{-2} [F_0(x, x') + F_1(x, x')\Omega^{-1} + \dots]. \quad (2.17)$$

Предположим, что это разложение можно почленно продолжить к реальным значениям W и x . Таким образом, в частности, при больших W мы имеем

$$F(W, x, x') = O(W^{-2}). \quad (2.18)$$

Поведение F при больших значениях W показывает, что интеграл (2.3) всегда сходится на верхнем пределе. Однако на нижнем пределе, где F расходится как W^{-2} , это не так [см. (2.15)]. Чтобы сделать интеграл конечным, добавим в подынтегральное выражение для сходимости множитель $\exp(-\epsilon/W)$, где ϵ — малая положительная постоянная. Физические величины следует вычислять при конечном значении ϵ и затем переходить к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Таким образом,

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

$$K(x, x') = i \int_0^{\infty} dW \exp(-im^2 W - \varepsilon/W) F(W, x, x'). \quad (2.19)$$

С точки зрения физики этот метод регуляризации соответствует требованию, чтобы частица двигалась вперед по параметру времени W . Как мы покажем в следующем разделе, он правильно приводит к обычному выражению для фейнмановского пропагатора в плоском пространстве-времени. Наше определение пропагатора (2.19) теперь по существу строгое. Перейдем к его следствиям.

3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРОПАГАТОРА

В предыдущем разделе было получено интегральное представление фейнмановского пропагатора $K(x, x')$, содержащее пропагатор $F(W, x, x')$, который соответствует определенному значению параметра времени W . Из уравнения (2.9) и из уравнения Шредингера для эволюции по параметру времени (2.11) при учете граничных условий (2.15) и (2.17) немедленно следует, что $K(x, x')$ является решением неоднородного волнового уравнения в метрике Шварцшильда

$$(\square^2 - m^2) K(x, x') = -\delta(x, x'). \quad (3.1)$$

В качестве альтернативы к интегралу по путям можно определить пропагатор $K(x, x')$ как решение уравнения (3.1) с заданными граничными условиями. Этот подход полезен, потому что некоторые свойства $K(x, x')$ можно непосредственно вывести, используя дифференциальное уравнение и обобщение на случай частиц с высшим спином, и более прост. Здесь мы приведем вывод граничных условий для $K(x, x')$, которые вытекают из его определения с помощью интеграла по путям.

Проиллюстрируем сначала соответствующую процедуру на примере безмассовой скалярной частицы в плоском пространстве. Решение F уравнения Шредингера для эволюции по параметру времени W , удовлетворяющее граничному условию (2.10), имеет вид

$$F(W, x, x') = i(4\pi W)^{-2} e^{is(x, x')/(4W)}, \quad (3.2)$$

где $s(x, x')$ обозначает квадрат интеграла между x и x' в пространстве Минковского. Уравнение (2.19) дает для пропагатора выражение

$$K(x, x') = -\frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{s(x, x') + i\epsilon}, \quad (3.3)$$

которое совпадает с правильным фейнмановским пропагатором. В произвольных координатах, в которых метрика Минковского аналитична, $s(x, x')$ — аналитическая функция координат и пропагатор $K(x, x')$ аналитичен везде, за исключением полюсов, где $s(x, x') = -i\epsilon$. Эти полюса соответствуют световым геодезическим, соединяющим x и x' . Именно свойство регулярности на бесконечности совместно с положением этих полюсов на плоскости комплексных координат однозначно фиксирует пропагатор $K(x, x')$ как решение неоднородного волнового уравнения. Более конкретно, в обычных прямоугольных координатах Минковского $x = (t, \mathbf{x})$ и $x' = (t', \mathbf{x}')$ пропагатор $K(x, x')$ имеет полюса при $t - t' = \pm(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| - i\epsilon)$. Следовательно, $K(x, x')$ есть такое решение неоднородного волнового уравнения, которое регулярно на бесконечности и сингулярности которого, соответствующие распространению вдоль световых геодезических, направленных в будущее, лежат ниже действительной оси t , в то время как сингулярности, соответствующие распространению вдоль световых геодезических, направленных в прошлое, лежат выше действительной оси t . Во всей остальной комплексной t -плоскости функция $K(x, x')$ аналитическая. Рассмотрим теперь аналогичные граничные условия для уравнения (3.1) в геометрии Шварцшильда.

Начнем с рассмотрения случая, когда точка x' расположена вне черной дыры, а x лежит на горизонте. Удобно использовать световые координаты Крускала U и V , в которых метрика Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -(32M^3 e^{-r/2M}/r) dU dV + r^2 d\Omega^2, \quad (3.4)$$

где функция r определяется соотношением

$$UV = (1 - r/2M) e^{r/2M}. \quad (3.5)$$

На горизонте $r = 2M$, а следовательно, либо U , либо V обращаются в нуль. Аналитически продолжим в комплексную плоскость тот элемент пары (U, V) , который не равен нулю, и назовем полученную таким образом поверхность комплексным горизонтом. Так как метрика в крускаловских координатах является аналитической на комплексном горизонте, то и функция $F(W, x, x')$ также будет аналитической на нем. Поэтому любые сингулярности пропагатора $K(x, x')$ возникают

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

из-за конечных точек интегрирования по W . Из выражения для асимптотики (2.17) функции $F(W, x, x')$ нетрудно увидеть, что при больших W интеграл сходится для всех комплексных значений x . Поэтому любые сингулярности $K(x, x')$ возникают из-за граничной точки $W = 0$. Для анализа этих особенностей разделим интервал $[0, \infty]$ интегрирования по W на две части $[0, W_0]$ и $[W_0, \infty]$, где W_0 — малая величина. Интеграл от W_0 до бесконечности дает вклад $K_0(x, x')$ в $K(x, x')$, который является аналитическим по x . В интервале от 0 до W_0 можно воспользоваться нашим выражением для поведения $F(W, x, x')$ при малых W везде, где оно справедливо. При $m = 0$ для $K(x, x')$ имеем

$$K(x, x') = K_0(x, x') - i \sum_c \frac{e^{i s_c(x, x') / (4 W_0)}}{s_c(x, x') + i \epsilon} D_c(x, x'). \quad (3.6)$$

Это выражение можно использовать, чтобы продолжить $K(x, x')$ до значений x вне комплексного горизонта. При $m \neq 0$ пропагатор $K(x, x')$ также имеет сингулярности при $s_c(x, x') = -i\epsilon$, т.е. слегка сдвинутые по сравнению с соответствующей световой геодезической, соединяющей точку x' с комплексным горизонтом. Найдем теперь расположение этих точек.

Начнем с того, что покажем, что световые геодезические, выходящие из x' , пересекают комплексный горизонт в точках, лежащих на его действительном сечении, т.е. при действительных значениях U и V . Для определенности рассмотрим сперва геодезические, соединяющие действительную точку x' вне черной дыры с горизонтом в будущем. Вместо аффинного параметра V на горизонте удобно использовать время Киллинга v , связанное с ним соотношением $V = \exp(\kappa v)$. Координата v — обычное опережающее время в координатах Эддингтона — Финкельштейна, которые покрывают область $V \geq 0$. Комплексные световые геодезические описываются заданием четырех координат как функций от комплексного аффинного параметра, который мы обозначим через λ . Следовательно, геодезическая на самом деле является двумерной поверхностью в пространстве комплексных координат.

Из соотношения $V = \exp(\kappa v)$ следует, что заданное значение v и значение, получающееся из него сдвигом на $\text{Im } v = 2\pi/\kappa$, соответствуют одному и тому же значению V . Вследствие этого, изучая све-

товые геодезические, координаты v которых ограничены на комплексной плоскости в полосе шириной $2\pi/\kappa$, мы получим информацию о геодезических, соответствующих любым другим значениям v . Удобно выбрать такую полосу, которая содержит действительную ось v . Затем можем предположить, что при $\lambda = 0$ координаты имеют действительные начальные значения $v^1, r^1, \theta^1, \phi^1$. Вопрос состоит в том, какие комплексные значения v в этой полосе при действительных значениях θ и ϕ и $r = 2M$ лежат на двумерной поверхности, соответствующей комплексной световой геодезической?

В стационарном сферически-симметричном пространстве-времени без потери общности можно выбрать световые геодезические, лежащие в экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$. Они характеризуются двумя интегралами движения e и l , которые могут принимать комплексные значения. Эти интегралы определяются следующим образом:

$$e = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{dv}{d\lambda}, \quad l = r^2 \frac{d\phi}{d\lambda}. \quad (3.7)$$

Из условия светоподобности $g(\dot{x}, \dot{x}) = 0$ получаем известные выражения

$$v - v^1 = \int_{r^1}^{2M} \frac{dr}{1 - 2M/r} \left\{ 1 - \frac{1}{[1 - b^2 r^{-2} (1 - 2M/r)]^{1/2}} \right\} \quad (3.8)$$

и

$$\phi - \phi^1 = \int_{r^1}^{2M} \frac{b dr / r^2}{[1 - b^2 r^{-2} (1 - 2M/r)]^{1/2}}. \quad (3.9)$$

Здесь мы обозначили через b прицельный параметр l/e . Так как аффинный параметр λ определен с точностью до умножения на произвольную постоянную, то для полного описания определенной световой геодезической оказывается достаточным задание одного инвариантного отношения b .

Чисто действительные геодезические, соединяющие x^1 с горизонтом в будущем, соответствуют действительным значениям b , лежащим между 0 и $3\sqrt{3}M$. Для этих значений точки $r = r^1$ и $r = 2M$ можно соединить чисто действительным контуром. По этой причине для действительных b в интервале от 0 до $3\sqrt{3}M$ удобно выбрать разрез функции $f(r) = [1 - b^2 r^{-2} (1 - 2M/r)]^{1/2}$ таким образом, чтобы

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

они не совпадали с положительной действительной осью r и чтобы $r = r'$ и $r = 2M$ лежали на одном и том же листе римановой поверхности функции f . Комплексная аналитическая структура f при других значениях b определяется аналитическим продолжением по этой переменной.

Данная комплексная величина b и данный контур в r -плоскости, соединяющий $r = r'$ с $r = 2M$, однозначно определяют комплексную световую геодезическую. Например, для всех действительных b , лежащих между 0 и $3\sqrt{3}M$, и чисто действительного контура, соединяющего $r = r'$ и $r = 2M$, существует единственная действительная световая геодезическая. При том же значении b другой контур, который нельзя получить из первого с помощью гладкой деформации, определил бы другую комплексную световую геодезическую.

Однако, как легко убедиться, рассматривая равенства (3.8) и (3.9), в подынтегральных выражениях этих соотношений отсутствуют полюса, которые могли бы препятствовать деформации контура, соединяющего $r = r'$ и $r = 2M$, с данного листа на любой другой. Поэтому удобнее всего выбрать контур просто лежащим вдоль действительной оси при условии, что она не пересекает разрезы функции $f(r)$.

Для данного контура интеграл (3.9) определяет функцию ϕ/b как многозначную функцию от b^2 . Чтобы получить однозначную связь между ϕ и b , необходимо ограничить область изменения b^2 данным листом риманова пространства функции ϕ/b . Назовем его физическим листом. Этот лист должен содержать часть действительной оси между $b^2 = 0$ и $b^2 = 27M^2$, которая соответствует реальным физическим световым геодезическим. У функции ϕ/b имеется точка ветвления при $b^2 = 27M^2$. Удобно поэтому определить физический лист как плоскость с разрезом вдоль положительной действительной оси от $27M^2$ до бесконечности и содержащую физические действительные значения от $b^2 = 0$ до $27M^2$. При этом нетрудно убедиться, что контур в уравнении (3.9) всегда можно выбрать расположенным вдоль действительной оси. При b^2 , лежащем на физическом листе, интеграл (3.9) устанавливает однозначную связь между ϕ и b .

В настоящий момент нас интересуют световые геодезические, имеющие действительное значение ϕ в их конечной точке. Элементарный анализ интеграла (3.9) показывает, что поскольку для b^2 ,

лежащих на физическом листе, можно выбрать действительный контур, то мнимая часть подынтегрального выражения всегда одного знака и мнимая часть φ не может обратиться в нуль, если только b^2 не является действительным и не лежит между 0 и $27M^2$. Однако при этих значениях b координата v конечной точки тоже будет действительной. Таким образом, комплексные световые геодезические, выходящие из точки x' , пересекают комплексный горизонт в будущем только при реальных значениях V . Очевидно, что подобное заключение справедливо и для горизонта в прошлом. Поэтому на комплексном горизонте имеются сингулярности K , слегка сдвинутые по сравнению с действительными величинами U и V , при которых световые геодезические, испущенные из x' , пересекают горизонт. Положение этих сингулярностей определяется соотношением $s(x, x') = -i\epsilon$. Определим теперь направление этих сдвигов.

Предположим, что x_0 — конечная точка на горизонте в будущем действительной световой геодезической, которая выходит из x' . Если V_0 обозначает координату V точки x_0 , то функция s при V в окрестности V_0 ведет себя следующим образом:

$$s(x, x') = \left(\frac{\partial s}{\partial V} \right)_{x_0} (V - V_0) + \dots \quad (3.10)$$

Если величина $(\partial s / \partial V)_{x_0}$ положительна, решение $s(x, x') = -i\epsilon$ лежит в нижней полуплоскости, тогда как если эта величина отрицательна, решение лежит в верхней полуплоскости. Чтобы определить правильный знак, предположим, что $k\delta V$ есть вектор смещения от световой геодезической к соседней геодезической, которая также начинается в точке x' , но оканчивается на горизонте в будущем в точке, расположенной в будущем по отношению к концу первой геодезической и аффинный параметр расстояния между их концами равен δV . Следовательно, на горизонте $k = \partial / \partial V$. Если l — касательный вектор к световой геодезической, то на горизонте $l \cdot k < 0$. Уравнение девиации геодезических дает

$$d^2(l \cdot k) / d\lambda^2 = 0, \quad (3.11)$$

и это соотношение можно использовать, чтобы найти значение $l \cdot k$ вдоль всей световой геодезической вплоть до точки $\lambda = 0$, откуда выходят обе геодезические. Имеем

$$l \cdot k = c\lambda, \quad (3.12)$$

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

где s — отрицательная постоянная. Так как касательный вектор к соседней геодезической равен сумме l и $k\delta V$, уравнение (3.12) позволяет заключить, что соседняя геодезическая времениподобна. Следовательно, $s(x, x')$ отрицательна при изменении x вдоль соседней кривой и $(\partial s / \partial V)_{x^0} < 0$. Таким образом, особенности пропагатора, соответствующие ${}^{x_0} S(x, x') = -i\epsilon$, лежат в верхней полуплоскости, и пропагатор будет аналитической функцией в нижней половине V -плоскости на комплексном горизонте.

Аналогичным образом можно вывести аналитические свойства пропагатора на комплексном горизонте в прошлом. Если x' — действительная точка вне черной дыры и x лежит на комплексном горизонте в прошлом, то пропагатор $K(x, x')$ будет аналитической функцией в верхней половине U -плоскости.

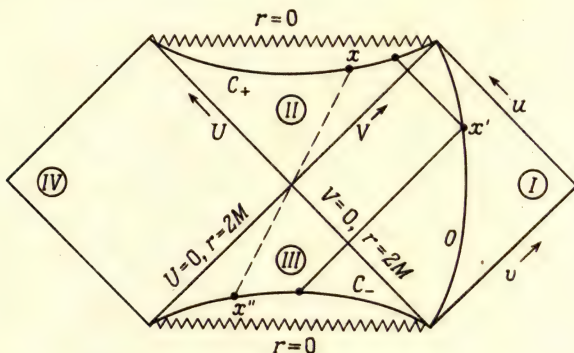
Аналитические свойства, выведенные нами из интеграла по путям для пропагатора на комплексном горизонте можно рассматривать в качестве граничных условий, выделяющих пропагатор как некоторое, вполне определенное решение неоднородного волнового уравнения (3.1). Для вывода всех наших дальнейших результатов мы могли бы исходить из этого определения пропагатора, использующего его аналитические свойства на комплексном горизонте, однако при подобном подходе нам бы недоставало физической мотивировки, которую дает наше определение в терминах интеграла по путям.

Неоднородное скалярное волновое уравнение совместно с полученными граничными условиями можно использовать, чтобы вывести аналитические свойства пропагатора в областях, отличных от комплексного горизонта. Чтобы выполнить программу,* описанную в разд. 1, рассмотрим в частности аналитические свойства пропагатора по шварцшильдовской координате t . Эта координата связана со световыми координатами U и V соотношениями

$$\left. \begin{aligned} U &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{(r-t)/4M} \\ V &= \left(1 - \frac{r}{2M}\right)^{1/2} e^{(r+t)/4M} \end{aligned} \right\} \quad U > 0, V > 0 \text{ (область II)} \quad (3.13a)$$

$$\left. \begin{aligned} U &= -\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{(r-t)/4M} \\ V &= \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{1/2} e^{(r+t)/4M} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} U < 0, V > 0 \text{ (область I)} \\ U > 0, V < 0 \text{ (область II)} \\ U < 0, V < 0 \text{ (область III)} \\ U > 0, V > 0 \text{ (область IV)} \end{aligned} \quad (3.136)$$

и аналогичными соотношениями с измененными знаками U и V в квадрантах, полученных из указанных отражением по отношению к началу $U - V$ -плоскости. Эти соотношения схематически указаны на диаграмме Пенроуза (фиг. 3).



Ф и г. 3. Диаграмма Пенроуза для геометрии Шварцшильда.

Амплитуда вероятности излучения черной дырой частиц, регистрируемых наблюдателем в состоянии с энергией E в области I можно связать [см. (4.4)] с интегралом от умноженного на $\exp(-iEt)$ пропагатора распространения от точки x на поверхности C_+ постоянного радиуса r в области II в точку x' , расположенную на мировой линии детектора в области I. Интеграл берется по координате t на C_+ . Пропагатор является аналитической по координате t функцией везде, за исключением особых точек при значениях x , соответствующих пересечению комплексной поверхности световыми геодезическими, выходящими из точки C_+ . Одним из таких значений является действительная величина t , соответствующая пересечению с C_+ действительной, направленной в будущее радиальной световой геодезической из x . В тексте показано, что если временная координата x имеет мнимую часть $-4\pi M$, то она соответствует точке x'' в области III, которая получается из x отражением в начале координат. Следовательно, имеется также другая особенность при t с мнимой частью $-4\pi M$, соответствующая действительной, направленной в прошлое радиальной световой геодезической, выходящей из x и пересекающей поверхность C_- , являющуюся отражением C_+ . Эти две сингулярности повторяются с периодом $8\pi M$ по $\text{Im} t$. Расположение этих сингулярностей показано на фиг. 4, а.

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Для определенности рассмотрим сначала случай, когда x' расположена вне черной дыры и x лежит в области II. Часть горизонта в будущем при $V \geq 0$ совместно с частью горизонта в прошлом при $U \geq 0$ образует полную характеристическую поверхность Коши для области II. Пропагатор внутри этой области однозначно определяется дифференциальным уравнением по начальным данным на этой поверхности Коши. Этими данными являются значения пропагатора на соответствующих частях горизонта.

При фиксированных r , θ и ϕ комплексные значения t отвечают определенным комплексным значениям U и V , определяемым формулой (3.13а). Если положить $t = \tau + i\sigma$, то имеем, в частности,

$$U = |U| e^{-i\sigma/4M}, \quad V = |V| e^{i\sigma/4M}. \quad (3.14)$$

Задачу нахождения пропагатора при определенном комплексном значении t можно рассматривать как задачу решения волнового уравнения (3.1) при фиксированном значении σ в действительных координатах $|U|$ и $|V|$. Поскольку метрика не зависит от t , это уравнение является гиперболическим для произвольных значений σ , и задача с начальными данными на характеристиках хорошо определена.

Аналитичность пропагатора на комплексном горизонте в верхней половине U -плоскости и в нижней половине V -плоскости позволяет заключить, что данные Коши для этой задачи в действительной области регулярны при условии, что $-4\pi M < \sigma < 0$. Стандартная теорема существования и единственности для гиперболических уравнений с начальными данными на характеристических поверхностях гарантирует существование решения для пропагатора в этой области σ . Чтобы установить аналитичность полученного решения по t , мы должны только проверить выполнимость условия Коши — Римана. То есть (черта означает комплексное сопряжение)

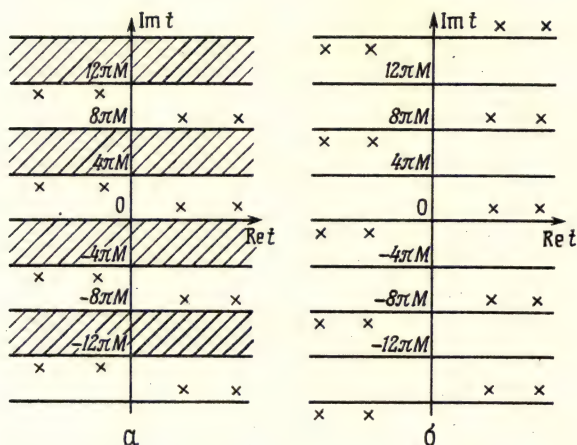
$$\left(\frac{\partial K}{\partial \bar{t}} \right)_r = \frac{1}{4M} \left(\bar{V} \frac{\partial K}{\partial \bar{V}} - \bar{U} \frac{\partial K}{\partial \bar{U}} \right) = 0, \quad (3.15)$$

где производная по \bar{t} берется при постоянном r . Очевидно, при $-4\pi M < \sigma < 0$ начальные данные удовлетворяют этому условию, так как K — аналитическая функция от U и V в соответствующих полуплоскостях на комплексном горизонте. Более того, $(\partial/\partial \bar{t})_r$ коммутирует с \square^2 и, следовательно, задачу определения $(\partial K/\partial \bar{t})_r$ можно

рассматривать как задачу решения волнового уравнения с нулевыми начальными данными на характеристических поверхностях Коши. Единственное решение этой задачи есть $(\partial K / \partial t)_r = 0$. Закljučаем поэтому, что для точки x' , лежащей во внешней области, и фиксированных r , θ , φ в области $U > 0$, $V > 0$ функция $K(x, x')$ аналитическая по t в полосе шириной $4\pi M$, лежащей ниже действительной оси.

Полосу аналитичности нельзя продолжить выше действительной оси, так как непосредственно над ней лежат сингулярности, соответствующие действительной световой геодезической, которая соединяет значение t на поверхности данного значения r с точкой x' (фиг. 3). Полосу аналитичности нельзя также продолжить ниже $\sigma = -4\pi M$. Из уравнения (3.14) видно, что это значение σ соответствует таким U и V , которые снова лежат в действительном сечении и отличаются только знаком. Пропагатор $K(x, x')$ при точке x , лежащей в области II, будучи продолжен по t до $t - 4\pi Mi$, совпадает с пропагатором от точки x' в области III до точки x' , лежащей во внешней области. Эта точка x'' является зеркальным отображением точки x относительно начала координат в $U - V$ -плоскости. Этот факт будет являться основой для нашего вывода излучения от черной дыры (см. разд. 4), однако сейчас мы просто отметим, что из него следует, что сразу ниже линии $\sigma = -4\pi M$ имеются сингулярности, которые соответствуют действительным световым геодезическим, соединяющим точку в области III на поверхности постоянного r с точкой x' . Сингулярности в этом случае лежат ниже действительной оси, так как точка x'' лежит в области III, и из соотношений, аналогичных уравнению (3.14), можно увидеть, что малое положительное мнимое значение U и отрицательное значение V , которые определяют положение полюса, соответствуют отрицательному мнимому значению t .

Аналитические свойства пропагатора $K(x, x')$ по переменной t , таким образом, становятся очевидными. При фиксированных θ , φ , r в области II и для точки x' , расположенной в области I, эти свойства проиллюстрированы на фиг. 4, а. Пропагатор является периодической по $\sigma = \text{Im}(t)$ функцией с периодом, равным $8\pi M$. Области аналитичности, соответствующие верхней половине U -плоскости и нижней половине V -плоскости на комплексном горизонте, представлены заштрихованными полосами шириной $4\pi M$. На этой фигуре также изображены периодические сингулярности, соответствующие



Ф и г. 4. Аналитические свойства пропагатора в комплексной плоскости. На фиг. 4, а изображена аналитическая структура $K(x, x')$ при x' , фиксированном вне черной дыры в области I, и при фиксированных значениях r, θ, φ внутри горизонта в будущем (в области II). Пропагатор периодичен по $\text{Im}(t)$ с периодом, равным $8\pi M$. Эта периодичность есть следствие выражения (3.14) для величины t через координаты U и V , в которых метрика аналитична везде, за исключением физической сингулярности. Заштрихованные полосы являются областями аналитичности по t . Эта аналитичность следует из аналитичности пропагатора на комплексном горизонте в верхней половине U -плоскости и в нижней половине V -плоскости. Крестами обозначено положение особенностей, соответствующих действительным световым геодезическим, соединяющим x' с кривой $r, \theta, \varphi = \text{const}$. Типичная ситуация изображена на фиг. 3. Непосредственно над действительной осью имеются сингулярности, соответствующие световым геодезическим, соединяющим x' с кривой $r, \theta, \varphi = \text{const}$ в области II. Ниже линии $\text{Im} t = -4\pi M$ расположены особенности, соответствующие действительным геодезическим, соединяющим x' с кривой $r, \theta, \varphi = \text{const}$ в области III. В каждом из этих случаев имеется бесконечная последовательность сингулярностей (из которой показаны только несколько), возникающая из-за того, что существуют световые геодезические, которые совершают произвольное число оборотов около $r = 3M$ и поэтому могут соединить кривую $r, \theta, \varphi = \text{const}$ с точкой x' при все больших значениях $|t - t'|$. Сингулярности при других значениях $\text{Im} t$ дублируют эти сингулярности, так как пропагатор периодичен по $\text{Im} t$ с периодом $8\pi M$. На фиг. 4, б изображена аналогичная аналитическая структура в случае, когда как x , так и x' лежат в области I. Пропагатор остается периодичным по $\text{Im} t$ с периодом $8\pi M$. В этом случае имеются бесконечные последовательности световых геодезических, соединяющих x' с кривой $r, \theta, \varphi = \text{const}$ и направленных как в будущее, так и в прошлое. В соответствии с этим имеются особенности, расположенные как выше, так и ниже действительной оси t . Эти сингулярности периодически повторяются по $\text{Im} t$ с периодом $8\pi M$.

действительным световым геодезическим, которые соединяют x' с точкой на кривой $\theta, \varphi, r = \text{const}$, лежащей либо в будущем, либо в прошлом.

Если обе точки x и x' лежат в области I, то пропагатор по-прежнему является периодической по σ функцией, причем период его, как это следует из уравнения (3.13), равен $8\pi M$. Теперь, однако, существуют такие действительные значения t как в прошлом, так и в будущем от точки x' , для которых имеются действительные световые геодезические, соединяющие эту точку с кривой $r, \theta, \varphi = \text{const}$. Для значений, лежащих в будущем от точки x' , соответствующие сингулярности слегка смещены с действительной оси t вверх. Для значений t в прошлом соответствующие сингулярности слегка смещены с действительной оси вниз. Эти сингулярности показаны на фиг. 4, б. Сингулярности, соответствующие действительным световым геодезическим, лежащие около $\sigma = \pm 4\pi M$, отсутствуют, так как соответствующие действительные точки лежат в области IV, каждая точка которой отделена от x' пространственноподобным интервалом.

Пропагатор $K(x, x')$ периодичен по мнимому t , потому что из его определения в виде интеграла по путям вытекает, что этот пропагатор является аналитической функцией крускаловских координат U и V везде, за исключением описанных выше сингулярностей. Однако шварцшильдовская координата t как функция от U и V имеет логарифмическую особенность и является многозначной; она определена только по модулю $8\pi i M$. Таким образом, если пропагатор имеет сингулярность при некотором значении U и V , то он как функция от t имеет периодические сингулярности, расстояние между которыми $8\pi i M$. Этот пропагатор подобен тому, который был предложен Унру [19]. Напротив, пропагатор, предложенный Бульваром [18], не периодичен по t и поэтому не аналитичен на обоих горизонтах.

Существование периодических по t сингулярностей приведет к тому, что наблюдатели, движущиеся вдоль линий $r, \theta, \varphi = \text{const}$ в продолженном решении Шварцшильда будут регистрировать частицы. Это очень напоминает тот факт, что, как показал Унру, наблюдатели, движущиеся вдоль мировых линий постоянного ускорения в пространстве Минковского также будут регистрировать частицы. С другой стороны, наблюдатель, движущийся вдоль какого-либо из двух гори-

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

зонтов, не увидит никаких частиц. Это иллюстрирует тот факт, что понятие частицы является понятием, зависящим от наблюдателя [20]. В следующем разделе мы покажем, что построенный здесь пропагатор, приводит к той же самой скорости рождения частиц с точки зрения наблюдателя, расположенного на постоянном расстоянии от черной дыры, которая была получена в работе [5] посредством изучения смешивания положительных и отрицательных частот при гравитационном коллапсе.

4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

В предыдущем разделе мы доказали аналитичность пропагатора $K(x, x')$ в некоторой полосе в t -плоскости в случае, когда x лежит в области II и x' лежит в области I шварцшильдовской геометрии. Используем теперь эту аналитичность, чтобы вывести тепловое излучение от шварцшильдовской черной дыры.

Предположим, что мы окружили шварцшильдовскую черную дыру детекторами частиц, расположенными на расстоянии некоторого большого постоянного радиуса R . Эти детекторы регистрируют частицы, вылетающие изнутри этой поверхности в состояниях $f_j(t', r', \theta', \varphi')$, которые описываются положительно-частотными (относительно времени t') решениями скалярного волнового уравнения. Амплитуда вероятности того, что частица, распространяющаяся в состоянии $h_j(x)$ с некоторой поверхности, ограничивающей область внутри R , будет зарегистрирована в состоянии $f_i(x')$, равна

$$-\int d\sigma^\mu(x') \int d\sigma^\nu(x) \bar{f}_i(x') \overleftrightarrow{\partial}_\mu K(x', x) \overleftrightarrow{\partial}_\nu h_j(x), \quad (4.1)$$

где интеграл по x' вычисляется по поверхности $r' = R$, а интеграл по x — по поверхности, ограничивающей внутреннюю область. Сокращение $a \overleftrightarrow{\partial}_\mu b$ означает $a b_{,\mu} - a_{,\mu} b$.

Предположим на мгновение, что детекторы частиц работают в течение интервала времени $t' \in (-t'_1, t'_1)$, где t'_1 очень велико. В конце концов мы перейдем к пределу $t'_1 \rightarrow 0$. В качестве внутренней граничной поверхности, о которой упоминалось выше, можно взять пространственноподобную поверхность, проходящую через звезду перед началом коллапса в момент $-t'_1$, полную пространственноподобную поверхность внутри горизонта в будущем и времениподобную поверхность, соединяющую ее с поверхностью $r' = R$ снаружи при

$t' = t'_1$. В качестве пространственноподобной поверхности внутри горизонта в будущем вне вещества мы выберем часть поверхности C_+ постоянного значения r , а внутри вещества — ее пространственноподобной поверхности внутри горизонта в будущем можно было бы выбрать сингулярность в будущем. Однако возникающие математические трудности, связанные с особенностью метрики при $r = 0$, делают это неудобным и заставляют рассматривать поверхности, отстоящие на некотором расстоянии от этих точек.

Вычислим теперь полную вероятность того, что частица зарегистрирована детектором в состоянии $f_i(x')$, которое локализовано во времени вблизи некоторого позднего момента времени t'_0 . Эта вероятность будет суммой квадратов амплитуд (4.1) по всем состояниям $h_j(x)$, которые не противоречат нашему знанию ситуации на ограничивающей поверхности. Состояния, локализованные на пространственноподобной части при $t' = -t'_1$, не дают вклада, так как мы предполагаем, что в начальном состоянии отсутствуют скалярные частицы. Вклад от других двух поверхностей существенно ограничен тем, что пропагатор $K(x, x')$ во внешней геометрии коллапсирующей звезды при поздних временах является функцией только от разности $t' - t$. Это следствие трансляционной инвариантности по времени шварцшильдовской геометрии. Таким образом, если $f_i(x')$ локализовано около позднего момента времени t'_0 , вклад в выражение (4.1) будут давать только времена t , сравнимые с t'_0 . В частности, отсутствует вклад от времениподобной поверхности, которая начинается в t'_1 , поскольку если выбрать t'_1 достаточно большим, то она пересекает значения t , много большие чем t'_0 . Более того, единственной частью пространственноподобной поверхности внутри горизонта, которая дает вклад, является часть $t \approx t'_0$, и для достаточно поздних моментов времени она заведомо находится вне вещества. Это дает возможность заключить, что если интересоваться вероятностью рождения частиц в поздние моменты времени, то детали коллапса несущественны. Единственной частью амплитуды (4.1), дающей вклад в вероятность рождения частиц является такая, в которой интеграл по x берется по полной пространственноподобной поверхности внутри горизонта, и мы можем при вычислениях заменить ее на поверхность C_+ постоянного значения r , лежащего между 0 и $2M$ в точной шварцшильдовской геометрии. При этом мы явно полагаем, что пропагатор между точкой внутри горизонта в будущем и точкой вне черной дыры в

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

поздние моменты времени можно с хорошей степенью точности аппроксимировать пропагатором, полученным нами в аналитически продолженной метрике Шварцшильда.

Чтобы вычислить полную вероятность наблюдения частицы мы заметим далее, что информация о состоянии частицы на сингулярности в будущем отсутствует. Полная вероятность получается суммированием квадратов модулей выражений (4.1) по полной системе состояний на C_+ . Как мы сейчас покажем, для вывода излучения от черной дыры не нужно проводить детальное вычисление этой суммы.

Нас главным образом интересует амплитуда вероятности излучения черной дырой частиц в состоянии с определенной положительной энергией E . Временная зависимость для этого состояния имеет вид $f \sim \exp(-iEt')$. Вследствие инвариантности относительно трансляций по времени, состояния $h_i(x)$ из полной системы на C_+ также можно выбрать в виде состояний, временная зависимость которых имеет вид $\exp(-iEt)$, хотя из-за того, что внутри горизонта t является пространственноподобной координатой, величину E уже нельзя интерпретировать как локальную энергию. Зависимость пропагатора только от разности $t' - t$ означает, что интеграл по t и t' в уравнении (4.1) приводит к δ -функции, соответствующей сохранению энергии. При вычислении вероятностей формально возникающий квадрат δ -функции, как обычно, заменяется на фактор плотности состояний. После выделения этой δ -функции, связанной с сохранением энергии, из уравнения (4.1) имеем

$$- (d\sigma(\mathbf{R}') \int d\sigma(\mathbf{R}) \left[\bar{f}_i(\mathbf{R}') \frac{\partial}{\partial r'} \bar{\xi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) \frac{\partial}{\partial r} h_j(\mathbf{R}) \right], \quad (4.2)$$

где \mathbf{R} и \mathbf{R}' соответственно обозначают координаты r, θ, φ и r', θ', φ' ; $f_i(\mathbf{R})$ и $h_j(\mathbf{R})$ обозначают угловые части соответствующих состояний; $d\sigma(\mathbf{R})$ и $d\sigma(\mathbf{R}')$ — интегралы по угловым переменным с выбранным определенным образом весом. Основная информация об излучении содержится в амплитуде $\bar{\xi}_E$, определяемой уравнением

$$\bar{\xi}_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} K(0, \mathbf{R}'; t, \mathbf{R}). \quad (4.3)$$

Используя симметрию $K(x, x')$ относительно перестановки x и x' , можно переписать это выражение в более удобной для дальнейшего форме

$$\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} K(t, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'). \quad (4.4)$$

Амплитуда ξ_E является компонентой с энергией E амплитуды вероятности распространения частицы с поверхности C_+ в точку $(0, \mathbf{R}')$, лежащую вне черной дыры.

Следуя программе, намеченной в разд. 1, мы хотим теперь сдвигая контур интегрирования в комплексную плоскость, связать амплитуду вероятности испускания, задаваемую уравнениями (4.2) и (4.4), с амплитудой вероятности поглощения черной дырой частицы в той же самой моде. Для этого достаточно ограничиться рассмотрением амплитуды $\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R})$ и сдвинуть контур интегрирования по t в уравнении (4.4) вниз на величину $-4\pi Mi$. Эта деформация контура возможна, так как основным результатом предыдущего раздела является аналитичность $K(t, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}')$ в полосе шириной $4\pi M$, лежащей ниже действительной оси. Уравнение (4.4) принимает вид

$$\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = e^{-\pi E/\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} K(t - i\pi/\kappa, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'), \quad (4.5)$$

где мы использовали поверхностную гравитацию черной дыры κ вместо $1/4M$. Уравнение (3.14) показывает, что смещение t на величину $-i\pi/\kappa$ эквивалентно отражению координат Крускала U и V в начале координатной системы. Таким образом интеграл в уравнении (4.5) можно интерпретировать как компоненту с энергией E амплитуды вероятности распространения частицы в точку $(0, \mathbf{R}')$, лежащую вне черной дыры с поверхности C_- , расположенной в области III, которая совпадает с образом поверхности C_+ при отражении в начале координат $U - V$ -плоскости. Если в уравнении (4.2) заменить ξ_E этим выражением, то мы получим амплитуду вероятности (со знаком минус) регистрации частицы энергии E в моде f_i , которая на поверхности C_- в области III находилась в состоянии h_i с той же самой энергией. Знак минус возникает из-за того, что соответствующая нормаль к поверхности C_- противоположна по направлению. Вследствие инвариантности относительно обращения времени квадрат модуля этой амплитуды

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

литуды в точности равен квадрату модуля амплитуды вероятности *поглощения* черной дырой частицы, вылетающей из точки $(0, \mathbf{R}')$ в состоянии f_i с энергией E , и попадает на C_+ в состоянии h_j с той же энергией. После суммирования по полной системе состояний h_j мы получаем следующее общее соотношение:

$$\begin{aligned} & (\text{Вероятность испускания шварцшильдовской черной дырой} \\ & \text{частицы в состоянии с энергией } E) = e^{-2\pi E/\kappa} \times (\text{Вероят-} \\ & \text{ность поглощения шварцшильдовской черной дырой частицы} \quad (4.6) \\ & \text{в том же состоянии}) \end{aligned}$$

Это именно та фундаментальная связь между испусканием и поглощением, которая была сформулирована в введении. Эта связь показывает, что черная дыра излучает частицы с тепловым спектром, характеризуемым температурой $T = \kappa/2\pi k$. Таким образом, мы снова приходим¹⁾ к результату работы [5].

5. ВРАЩЕНИЕ, ЗАРЯД И СПИН

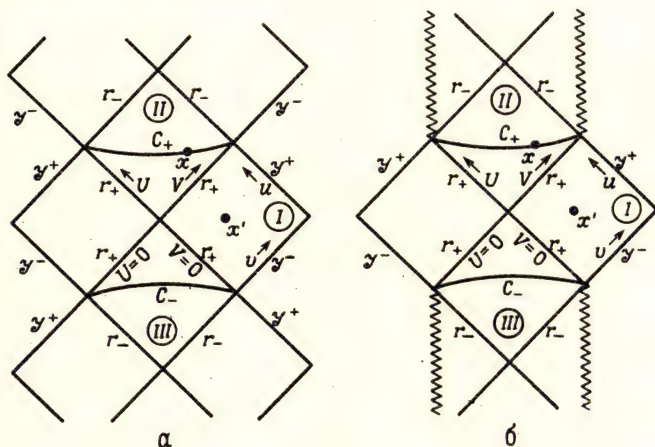
В этом разделе мы приведем некоторые замечания, касающиеся обобщения наших результатов на случай частиц с более высокими спинами и как заряженных черных дыр, так и вращающихся.

Для полей с ненулевым спином трудно представить пропагатор в виде интеграла по путям. Однако предположим, что аналитические свойства пропагаторов для частиц с высшими спинами совпадают с теми, которые мы установили для скалярного поля. А именно, предположим, что если U и V являются аффинными параметрами соответственно вдоль горизонтов в будущем и прошлом, причем оба возрастают по направлению в будущее, то пропагатор от точки вне черной дыры к точке на горизонте является аналитическим в верхней половине

¹⁾ Здесь уместно сделать замечание, чтобы сравнить обозначения, используемые в настоящей работе, с обозначениями, принятыми в работе [5]. Мы выбрали действие (2.1) таким образом, чтобы при используемом нами выборе сигнатуры (+2) переменная часть этого действия для нерелятивистских путей сводилась к $\int dt (dx/dt)^2$. Это — обычный выбор для нерелятивистского действия, приводящий к обычной форме уравнения Шредингера, и зависимость от времени решений с энергией E имеет вид $\exp(-iEt)$. В работе [5] волновые функции с определенной частотой имели временную зависимость вида $\exp(i\omega t)$. Мы получили бы те же самые физические результаты, если бы начали с действия, имеющего противоположный знак.

U -плоскости и в нижней половине V -плоскости. Если принять это предположение, тогда непосредственно получается обобщение наших результатов на случай частиц с высшими спинами, поскольку вывод излучения от шварцшильдовской черной дыры, приведенный в предыдущем разделе, и вывод для черных дыр более общего вида, который будет приведен ниже, зависят только от этого свойства аналитичности и правильного определения амплитуд вероятности излучения и поглощения. Теперь мы приступаем к обобщению нашего вывода на случай керровской и рейснер-нордстремовской черных дыр. Для простоты рассмотрим эти два случая отдельно, предоставляя читателю объединить эти выводы и получить общее выражение для вращающейся заряженной черной дыры.

А. Керровская черная дыра. На фиг. 5, а изображена известная диаграмма Пенроуза для керровской черной дыры. Следуя нашему выводу для шварцшильдовского случая, можно связать амплитуду вероятности излучения частицы черной дырой с интегралом от пропагатора $K(x, x')$, в котором x' фиксирована вне черной дыры, а по x



Фиг. 5.

а. Диаграмма Пенроуза для осевого сечения керровской черной дыры. б. Диаграмма Пенроуза для рейснер-нордстремовской черной дыры.

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

интегрирование ведется по пространственноподобной поверхности внутри горизонта, которая разделяет прошлое и будущее. Удобно обозначить эту поверхность через C_+ и выбрать в качестве ее поверхность постоянного значения r в обычных координатах Бойера — Линдквиста таким образом, что $r_- < r < r_+$. Чтобы обобщить наш результат на случай керровской геометрии, нам, таким образом, потребуется система координат, в которой метрика регулярна по крайней мере в областях I-III, показанных на фиг. 5, а. К счастью, Картер [21] построил подобную систему координат. Чтобы избежать длинных переопределений, мы будем использовать его обозначения везде, где они совпадают с обозначениями, принятыми в нашей статье. За разъяснениями по поводу символов, которые мы не определяем, читатель отсылается к работе Картера.

Область I керровской геометрии можно покрыть координатами Бойера — Линдквиста (t, r, θ, ϕ) , причем $r > r_+$ (Картер использует $\hat{t}, \hat{\phi}$ вместо наших обозначений t, ϕ). Области II и III можно покрыть аналогичной картой с $r_- < r < r_+$. Области I и II можно покрыть координатами Керра — Ньюмена, в состав которых входит опережающее время v . Аналогично области I и III можно покрыть координатами, содержащими запаздывающее время u . (Картер использует u вместо нашего v и $-w$ вместо нашего u .) В области I эти координаты связаны соотношениями вида

$$t = u + f(r), \quad (5.1)$$

$$t = v - f(r), \quad (5.2)$$

где $df/dr = (r^2 + a^2)/\Delta$ Картер вводит затем новую азимутальную киллинговскую угловую координату ϕ^+ , определяемую уравнением

$$\phi^+ = \phi - \omega_+ t, \quad (5.3)$$

где $\omega_+ = a/(r_+^2 + a^2)$ — угловая скорость вращения горизонта. Он также вводит две новые светоподобные координаты x и y , которые соответствуют нашим U и V . Они определяются следующим образом:

$$U = -e^{-\kappa u}, \quad V = e^{\kappa v}, \quad \text{область I,} \quad (5.4a)$$

$$U = e^{-\kappa u}, \quad V = e^{\kappa v}, \quad \text{область II,} \quad (5.4b)$$

$$U = -e^{-\kappa u}, \quad V = -e^{\kappa v}, \quad \text{область III,} \quad (5.4b)$$

где $\kappa = 1/2(r_+ - r_-)/(r_+^2 + a^2)$ — поверхностная гравитация (вращающейся) черной дыры. Таким образом, V совпадает с координатой Кар-

тера x , в то время как U совпадает с координатой Картера y , взятой с обратным знаком. В этой новой $(U, V, \theta, \varphi^+)$ карте метрика аналитична в областях I — III [см. уравнение (26) работы Картера]. Горизонт в будущем расположен при $U = 0$, и V является аффинной координатой вдоль него. Горизонт в прошлом расположен при $V = 0$, и U является аффинной координатой вдоль него. Координата r как функция от U и V определяется соотношениями (5.1), (5.2) и (5.4). Различные определения схематически изображены на фиг. 5,а.

В шварцшильдовском случае амплитуда вероятности излучения черной дырой частицы с энергией E в конечном счете была связана с интегралом $\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R})$ по поверхности постоянного r внутри горизонта в будущем от умноженного на $\exp(-iEt)$ пропагатора распространения частицы от точки x на этой поверхности в точку x' снаружи от дыры. В керровском случае мы будем интересоваться амплитудой испускания частицы с энергией E и угловым моментом относительно оси вращения m (m не следует путать с массой покоя). Аналогичным образом эту амплитуду можно связать с интегралом вида

$$\xi_{Em}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi e^{-i(Et - m\varphi)} K(t, \varphi, \mathbf{R}; 0, 0, \mathbf{R}'). \quad (5.5)$$

Здесь K — пропагатор в геометрии Керра, который вследствие инвариантности относительно сдвигов по времени и аксиальной симметрии зависит только от разностей t и φ координат точек x и x' . Величины \mathbf{R} и \mathbf{R}' обозначают r, θ координаты точек x и x' . Интеграл берется по поверхности C_+ . Рассуждения, аналогичные тем, которые были приведены в шварцшильдовском случае, показывают, что при фиксированных r, θ, φ^+ функция K , аналитическая при U в верхней полуплоскости и при V в нижней полуплоскости. Следовательно, мы можем деформировать контур интегрирования по t вниз на величину $-i\pi/\kappa$, оставляя r, θ и φ^+ фиксированными, поскольку это сводится к повороту U на угол π и V — на угол $-\pi$. Незменность φ^+ , согласно (5.3), означает, что при этом $\varphi \rightarrow \varphi - i\pi\omega_+/\kappa$. Таким образом,

$$\xi_{Em}(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = e^{-\pi(E - m\omega_+)/\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \int_0^{2\pi} d\varphi K(t - i\pi/\kappa, \varphi - i\pi\omega_+/\kappa, \mathbf{R}; 0, 0, \mathbf{R}'). \quad (5.6)$$

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Так как этот сдвиг t эквивалентен [см. (5.4)] замене $U \rightarrow -U$ и $V \rightarrow -V$, то интегрирование теперь ведется по отраженной поверхности постоянного значения r , лежащей в области III, которая на фиг. 5, а обозначена через C_- . Оставшийся интеграл можно связать с амплитудой вероятности поглощения черной дырой частицы с энергией E и угловым моментом m . Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} & \text{(Вероятность излучения керровской черной дырой моды с энер-} \\ & \text{гией } E \text{ и угловым моментом } m) = e^{-2\pi(E - m\omega_+)/\kappa} \times \text{(Вероят-} \\ & \text{ность поглощения керровской черной дырой моды с энергией } E \\ & \text{и моментом } m). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Именно это соотношение позволяет нам вывести, что вращающаяся черная дыра будет излучать среднее число частиц, пропорциональное $\{\exp[(E - m\omega_+)/\kappa] - 1\}$, и, таким образом, $\kappa/2\pi k$ можно интерпретировать как температуру черной дыры [5, 6].

Б. Рейсснер-нордстремовская черная дыра. Ситуация с рейсснер-нордстремовской черной дырой аналогична керровской. Здесь, однако, мы исследуем амплитуду вероятности излучения черной дырой частиц с зарядом q . На фиг. 5, б изображена диаграмма Пенроуза для геометрии Рейсснера – Нордстрема. Пропагатор частицы с зарядом q является решением волнового уравнения

$$g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha - iqA_\alpha)(\nabla_\beta - iqA_\beta)K(x, x') = -\delta(x, x') \quad (5.8)$$

на фоне рейсснер-нордстремовской геометрии. В обычной калибровке имеется только одна неисчезающая компонента A_μ , равная

$$A_t(x) = e/r, \quad (5.9)$$

где e – заряд черной дыры. Однако нельзя ожидать, что K в такой калибровке будет аналитической функцией в верхней половине U -плоскости и нижней половине V -плоскости, как этого требуют наши граничные условия, поскольку компоненты $A_\mu(x)$ не аналитичны на горизонте в координатах, являющихся на нем аналитическими. Если, например, мы используем (u, r, v, ϕ) -координаты, которые аналитичны на горизонте в будущем, то $A_r(x) = \frac{e}{r}(1 - 2M/r + e^2/r^2)^{-1}$ и это выражение расходится при $r = r_+$. Можно найти калибровку, в которой потенциал A_μ стационарен и регулярен на обоих горизонтах, если сделать преобразование

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \Lambda_{,\mu}, \quad (5.10)$$

где

$$\Lambda = \Phi t \quad (5.11)$$

и Φ — потенциал на горизонте, равный e/r_+ . В новой калибровке потенциал A_μ будет аналитической функцией в той же самой области, что и метрика, но он не обращается в нуль на бесконечности. Это означает, что временная зависимость волны с энергией E на большом расстоянии от дыры будет не $\exp(-iEt)$, а $\exp[-i(E - q\Phi)t]$.

Амплитуду вероятности излучения черной дырой частицы с энергией E и зарядом q так же, как в шварцшильдовском и керровском случаях, можно выразить в виде интеграла от пропагатора по поверхности C_+ постоянного значения координаты r , которое лежит между горизонтом будущего r_+ и внутренним горизонтом r_- . Вследствие инвариантности пропагатора относительно сдвигов по времени амплитуда вероятности излучения зависит от интеграла

$$\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(E - \Phi q)t} K(t, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'), \quad (5.12)$$

где \mathbf{R} обозначает координаты r, θ, ϕ .

В новой калибровке пропагатор K аналитичен в верхней полуплоскости U и в нижней полуплоскости V . Здесь координаты U и V связаны с координатами Картера так, как это было описано в уравнении (5.4) и выше. Как и в случае метрики Керра, эта аналитичность позволяет сдвинуть контур интегрирования по t в уравнении (5.12) в комплексной t -плоскости вниз на величину $-i\pi/\kappa$, сохраняя неизменным r , поскольку это сводится к повороту U на π и V на π . Таким образом,

$$\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = e^{\pi(E - q\Phi)/\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-i(E - q\Phi)t} K(t - i\pi/\kappa, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'). \quad (5.13)$$

Так как сдвиг t на $-i\pi/\kappa$ эквивалентен отражению $U \rightarrow -U$ и $V \rightarrow -V$, этот интеграл можно записать в виде

$$\xi_E(\mathbf{R}', \mathbf{R}) = e^{\pi(E - q\Phi)\kappa} \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{-iEt} K(t, \mathbf{R}; 0, \mathbf{R}'), \quad (5.14)$$

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

где интегрирование теперь ведется по отраженной поверхности C_- , показанной на фиг. 5,б. Как и ранее, интеграл в (5.14) можно связать с амплитудой вероятности поглощения черной дырой частицы с зарядом q . Повторяя рассуждения, которые привели к соотношению (4.6), имеем

$$\begin{aligned} & \text{(Вероятность излучения рейсснер-нордстремовской черной} \\ & \text{дырой частицы с зарядом } q \text{ и энергией } E) = e^{-2\pi(E - q\Phi)/\kappa} \times \\ & \times \text{(Вероятность поглощения рейсснер-нордстремовской черной} \\ & \text{дырой частицы с зарядом } q \text{ и энергией } E). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Именно это соотношение позволяет доказать, что среднее число излучаемых вращающейся черной дырой заряженных скалярных частиц в определенной моде пропорционально $\{\exp[(E - q\Phi)/kT] - 1\}^{-1}$, где $kT = \kappa/2\pi$. (См. работы [5] и [22].)

ПРИЛОЖЕНИЕ

ВЫВОД УРАВНЕНИЯ ДИФфуЗИИ ДЛЯ $F(\Omega, x, x')$

Амплитуда $F(\Omega, x, x')$ определяется интегралом по путям

$$F(\Omega, x, x') = \int \delta x[\omega] \exp \left[-\frac{1}{4} \int_0^\Omega \gamma(\dot{x}, \dot{x}) d\omega \right], \quad (\text{П.1})$$

где γ — положительно определенная метрика (2.6), $\dot{x} = dx/d\omega$ и суммирование ведется по всем путям, удовлетворяющим условиям $x(0) = x'$ и $x(\Omega) = x$. Выведем теперь уравнение диффузии (2.8) для F и в процессе этого вывода обсудим интерпретацию дифференциала $\delta x[\omega]$.

Разделим интервал $[0, \Omega]$ на $N + 1$ частей длиной ϵ . Используя обычные весовые функции при интегрировании по пространству-времени, можно следующим образом интерпретировать интеграл в соотношении (2.1):

$$\begin{aligned} F(\Omega, x, x') = & \lim_{N \rightarrow \infty} \int \frac{d^4 x_N}{A} [\gamma(x_N)]^{1/2} \int \frac{d^4 x_{N-1}}{A} \dots \\ & \dots \int \frac{d^4 x_1}{A} [\gamma(x_1)]^{1/2} \exp \left[-\sum_{i=1}^N S(\epsilon, x_{i+1}, x_i) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

где $x_0 = x'$, $x_{N+1} = x$ и S дается интегралом

$$S(\epsilon, x_{i+1}, x_i) = \frac{1}{4} \int_0^\epsilon d\omega \gamma(\dot{x}, \dot{x}), \quad (\text{П.3})$$

вычисленным вдоль геодезического пути, соединяющего x_i при $\omega = 0$ при x_{i+1} при $\omega = \epsilon$. Нормировочная постоянная A фиксируется требованием равенства единице амплитуды вероятности распространения частицы из одной точки в *любую* другую точку пространства-времени. Это условие эквивалентно

$$A = \int d^4x [\gamma(x)]^{1/2} \exp[-S(\epsilon, x, x')]. \quad (\text{П.4})$$

Уравнение (П.2) является правильным потому, что по мере того как ϵ становится все меньше и меньше, действие для путей, соединяющих фиксированные точки x_i и x_{i+1} становится все больше и больше, и, следовательно, их вклад в интеграл экспоненциально уменьшается. Главный вклад дает стационарный путь, для которого значение S минимально. Этот путь является геодезической между точками.

Уравнение диффузии можно получить, рассматривая связь между $F(\Omega + \epsilon, x, x')$ и $F(\Omega, x, x')$. Из уравнения (П.2) имеем

$$F(\Omega + \epsilon, x, x') = \int d^4y [\gamma(y)]^{1/2} \exp[-S(\epsilon, x, y)] F(\Omega, y, x'). \quad (\text{П.5})$$

Положим $y = x + z$, и пусть интегрирование ведется по z . Разложим S и F в правой части уравнения по степеням z . Разложим F в левой части уравнения по степеням ϵ . Анализ интеграла показывает, что только несколько первых членов разложения в правой части дают линейный по ϵ вклад в F , приводя к выражению для $\partial F / \partial \Omega$. Ченг [4] выполнил этот анализ в общей координатной системе. Однако вычисления существенно упрощаются, если ввести в точке x нормальные римановы координаты. В этой координатной системе имеем

$$\gamma_{\alpha\beta}(y) = \delta_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R_{\alpha\gamma\beta\delta} z^\gamma z^\delta + O(z^3), \quad (\text{П.6})$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ обозначает δ -символ Кронекера. Из определения нормальных координат вытекает, что геодезические, выходящие из начала, — прямые линии, так что $\dot{x}^\alpha = z^\alpha / \epsilon$ и

$$S(\epsilon, x, x + z) = \frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta / \epsilon. \quad (\text{П.7})$$

5. ВЫВОД ИЗЛУЧЕНИЯ ОТ ЧЕРНОЙ ДЫРЫ

Из вида S можно заключить, что при $\epsilon \rightarrow 0$ существенный вклад в интеграл дает область, где $z \sim \epsilon^{1/2}$. Следовательно, необходимо удерживать под интегралом только члены $O(z^2)$ разложения $(\gamma)^{1/2}$ и F , и пределы интегрирования можно распространить до бесконечности. Далее, член нулевого порядка в разложении (П.5) дает условие нормировки

$$A = \int d^4 z \exp\left(-\frac{1}{4} \delta_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta / \epsilon\right) = (4\pi\epsilon)^2. \quad (\text{П.8})$$

Поскольку интеграл от нечетной по z функции обращается в нуль, выражение для члена первого порядка по ϵ равно

$$\epsilon \frac{\partial F}{\partial \Omega} = B^{\alpha\beta} \left(\frac{1}{2} F_{,\alpha\beta} - \frac{1}{6} R_{\alpha\beta} F \right), \quad (\text{П.9})$$

где член, содержащий кривизну, возникает из разложения

$$\gamma^{1/2} = 1 - \frac{1}{6} R_{\alpha\beta} z^\alpha z^\beta + O(z^3) \quad (\text{П.10})$$

и $B^{\alpha\beta}$ равно интегралу

$$B^{\alpha\beta} = \int d^4 z \left(\frac{z^\alpha z^\beta}{A} \right) \exp\left(-\frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} z^\mu z^\nu / \epsilon\right) = 2\epsilon \delta^{\alpha\beta}. \quad (\text{П.11})$$

Используя это выражение и заменяя частные производные в нормальных координатах ковариантными производными $\tilde{\nabla}_\alpha$ по отношению к метрике γ , окончательно приходим к уравнению диффузии для F . Это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = \left(\gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta - \frac{1}{3} R \right) F. \quad (\text{П.12})$$

Если учесть, что R равно нулю для шварцшильдовской геометрии, это уравнение в точности совпадает с (2.8).

Множитель $-R/3$ в уравнении (П.12) есть следствие использованного нами определенного выбора веса в интегралах по координатам (П.2). Если мы заменим $\exp[-S(\epsilon, x_{i+1}, x_i)]$ в интегралах на

$$[\gamma(x_{i+1})/\gamma(x_i)]^{s/2} \exp[-S(\epsilon, x_{i+1}, x_i)],$$

то возникающее при этом уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial F}{\partial \Omega} = \left[\gamma^{\alpha\beta} \tilde{\nabla}_\alpha \tilde{\nabla}_\beta + \frac{1}{3} (s-1) R \right] F. \quad (\text{П.13})$$

Таким образом, за счет соответствующего выбора действия можно получить любой коэффициент при множителе скалярной кривизны как в уравнении диффузии, так и в уравнении для K . Для рассматриваемых нами вакуумных решений для черных дыр кривизна R равна нулю, все эти уравнения тождественно совпадают, и мы больше не будем касаться этого вопроса. По этому поводу см., однако, замечания в работах [4, 11].

Благодарности

Мы благодарны за гостеприимство Кипу Торну и группе исследователей по релятивистской физике Калифорнийского технологического института. Нам бы также хотелось поблагодарить Вернера Израэля и Ричарда Фейнмана за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R.P., Rev. Mod. Phys., **20**, 327 (1948).
2. Morette C., Phys. Rev., **81**, 848 (1951).
3. DeWitt B.S., Rev. Mod. Phys., **29**, 377 (1957).
4. Cheng K.S., Journ. Math. Phys., **13**, 1723 (1972).
5. Hawking S.W., Nature, **248**, 30 (1974); Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
6. Hawking S.W., Phys. Rev., **D13**, 191 (1976). (Статья 3 настоящего сборника.)
7. Feynman R.P., Phys. Rev., **76**, 769 (1949).
8. Fock V., Phys. Zeit. Sowjetunion, **12**, 404 (1937).
9. Nambu Y., Progr. Theor. Phys., **5**, 82 (1950).
10. Schwinger J., Phys. Rev., **82**, 64 (1951).
11. DeWitt B.S., Phys. Rep., **190**, 295 (1975). (Статья 2 настоящего сборника.)
12. Bjorken J.D., Drell S.D., Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill Book Co., New York, 1965.
13. Nelson E., Journ. Math. Phys., **5**, 332 (1964).
14. Kac M., Probability and Related Topics in the Physical Sciences, Interscience Publishers, New York, 1959. (Имеется перевод: М. Кац, Вероятность и смежные проблемы физики, "Мир", М., 1965.)
15. Symanzik K., в сборнике Local Quantum Theory, Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi", **45**, 1969.
16. Streater R.F., Rep. Progr. Phys., **38**, 771 (1975).
17. Eidelman S.D., Parabolic Systems, North-Holland Publishing Co., Amsterdam — Wolters — Noordhoff Publishing Groningen, 1969, p. 178.
18. Boulware D., Phys. Rev., **D11**, 1404 (1975).
19. Unruh W.G., Phys. Rev., **D14**, 870 (1976).
20. Ashtekar A., Magnon A., Proc. Roy. Soc. (London), **A346**, 375 (1975).
21. Carter B., Phys. Rev., **174**, 1559 (1968).
22. Gibbons G.W., Commun. Math. Phys., **44**, 245 (1975).

Аномалии следов и эффект Хокинга*

С.М. Кристенсен, С.А. Фуллинг

Christensen S.M.***, Fulling S.A.***, Phys. Rev., D15, 2088 (1977)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Общее сферически-симметричное статическое решение уравнения $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$ во внешней области метрики Шварцшильда выражено через две константы интегрирования и две произвольные функции, одна из которых — след $T_{\mu\nu}$. Одна из констант равна величине T_{tr} на бесконечности, а другая определяется, если потребовать, чтобы физически нормированные компоненты $T_{\mu\nu}$ были конечны на горизонте будущего. След тензора напряжений конформно-инвариантной квантовой теории поля может быть отличным от нуля (аномальным), но должен быть пропорционален (в данном случае) скаляру Вейля $48 M^2 r^{-6}$; коэффициент пропорциональности для скалярного поля найден при помощи косвенных аргументов, и он равен $(2880 \pi^2)^{-1}$. В двумерном случае величина излучения хокинговского черного тела на бесконечности прямо пропорциональна величине аномального следа (кратного скаляру кривизны); знание любого из этих чисел полностью определяет тензор напряжений вне тела в конечной стадии коллапса. В четырехмерном случае вместо этого получается некоторое соотношение между остающимися неопределенными функциями, которое мы

* Работа финансировалась Национальным научно-исследовательским советом (США), договор № В/RC/68807. Публикация частично финансировалась Национальной организацией содействия развитию науки (США), договор № MPS 74-16311 A01, Университет Ута и Отделение математики, Техасский Эй энд Эм университет.

** Department of Mathematics, University of London King's College, Strand, London WC2R 2LS, England; настоящий адрес: Department of Physics, University of Utah, Salt Lake City, Utah 84112.

*** Department of Mathematics, University of London King's College, Strand, London WC2R 2LS, England; настоящий адрес: Department of Mathematics, Texas A & M University, College Station, Texas 77843.

© 1977 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

выбираем в виде $T_\theta^0 - T_a^a/4$. Все это, плюс дополнительные физические и математические рассмотрения, приводит нас к вполне определенной, физически убедительной качественной картине $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Заложена основа для точных вычислений $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Тензор напряжений (тензор энергии-импульса) $T_{\mu\nu}$ включает в себе значительную часть физического содержания квантовой теории поля в искривленном пространстве-времени [1, 2]. Даже в теории только с внешними взаимодействиями (т.е. с линейными полевыми уравнениями) и даже если оператор поля уже разложен по нормальным модам, вычисление средних значений тензора напряжений затруднительно. Требуется проинтегрировать функции, которые обычно не известны в замкнутой форме и даже не могут быть аппроксимированы равномерно по параметру интегрирования. Эти технические сложности еще возрастают из-за необходимости некоторым образом регуляризовать интегралы перед тем, как исключать их бесконечные части с помощью перенормировки, не говоря уже о неоднозначностях или принципиальных вопросах самой перенормировочной процедуры. Поэтому любая информация относительно тензора напряжений в конкретных задачах, которая может быть получена из общих принципов без детальных вычислений, представляет большой интерес.

Эти принципы включают геометрические симметрии, ковариантный закон сохранения $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$, и в некоторых случаях, ограничение на вид следа T_α^α . В классической теории с конформно-инвариантным лагранжианом след равен нулю. Однако в недавних работах [14–24] было показано, что в соответствующей квантованной теории оператор тензора напряжений может приобретать ненулевой след вследствие перенормировки. (Это явление называется конформной аномалией¹⁾, или аномалией следа.) След остается еще c -числом и локальным геометрическим скаляром, и из соображений размерности число содер-

¹⁾ Этот термин был применен в работе [2] для того, чтобы описать неединственность вакуумного состояния относительно конформных преобразований (разновидность спонтанного нарушения симметрии). Оба эффекта, очевидно, отражают тот факт, что конформная инвариантность есть "случайная" симметрия некоторых уравнений для безмассового поля, а не фундаментальный физический принцип. Построение и физическая интерпретация квантовой теории таких полей требует применения полной метрической структуры пространства-времени.

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

жащихся в нем производных метрического тензора должно равняться размерности пространства-времени. Таким образом, в двумерном пространстве-времени T^α_α может быть только пропорциональным R , а в четырехмерном представляет собой линейную комбинацию $\square R$, R^2 , $R^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ и $C^2 \equiv C^{\alpha\beta\gamma\delta}C_{\alpha\beta\gamma\delta}$. Здесь безразмерные коэффициенты могут зависеть от частного типа рассматриваемого конформно-инвариантного поля (например, от спина), но их можно вычислить в каждом случае, по крайней мере в принципе. (Вычисление следа в некоторой конкретной модели пространства-времени дает универсально справедливую информацию относительно аномальных коэффициентов). Знания следа достаточно для того, чтобы значительно ограничить возможную форму $T_{\mu\nu}$. Тот факт, что след не равен нулю, приводит к некоторым качественным следствиям; в частности, мы приведем аргументы, что он тесно связан с процессами рождения частиц в некоторой геометрии.

Модель, которая привлекла в последние годы наибольшее внимание, это модель сферически-симметричного тела массы M , испытывающего гравитационный коллапс [3]. Вне тела пространство-время имеет метрику Шварцшильда:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad (1.1)$$

и область, в которой применима эта метрика, простирается через горизонт будущего ($r = 2M$, $t = +\infty$). (Обратным влиянием квантованных полей на геометрию пренебрегается.) При больших значениях запаздывающего времени (и не слишком близко к телу), в так называемой стационарной области, среднее значение $T_{\mu\nu}$ по первоначальному вакуумному состоянию становится, как ожидается, почти независимым от t (см. [1]) и принимает на пространственной бесконечности вид, характерный для излучения при температуре $kT = (8\pi M)^{-1}$ из тела с характеристиками излучения (поглощения), определяемыми оптическими свойствами внешней области шварцшильдовского пространства-времени. В качестве некоторого шага к пониманию локальной физики этой проблемы мы рассматриваем поэтому вид тензора напряжений в метрике (1.1) в предположении, что он не зависит от времени и сферически симметричен. Уравнения законов сохранения $\nabla_\nu T^\nu_\mu = 0$ приводят в этом случае к тому, что $T_{\mu\nu}$ представляется суммой четырех членов [см. (2.8)], каждый из которых в отдельности сохраняется, сферически симметричен и не зависит от времени и каждый из которых удовлетворяет всем, кроме одного, из следующих

условий: 1) след равен нулю; 2) инвариантность относительно отражения времени (точнее, $T_{tr} = 0$); 3) тангенциальное давление равно одной четверти следа: $\Theta \equiv T_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} = 0$; 4) конечность компонент тензора в локальной ортонормированной системе координат на горизонте будущего. Слагаемое, имеющее ненулевой след, полностью определяется, когда этот след известен; для конформно-инвариантных полей, как отмечалось выше, след не зависит от состояния и легко находится из соображений общей ковариантности. Слагаемые, нарушающие условия 2 и 4, содержат произвольные константы, которые фиксируются, если известно поведение $T_{\mu\nu}$ на бесконечности и на горизонте. Остающаяся произвольной функция $\Theta(r)$ неизвестна, но на нее могут быть наложены некоторые ограничения из физических соображений.

Статические решения уравнений закона сохранения применимы глобально к полному многообразию шварцшильдовской черной дыры, где отсутствует центральное тело и метрика (1.1) продолжена любым способом до горизонта прошлого. (Нам не потребуется рассматривать непосредственно области пространства-времени за горизонтами.) В этой модели существует несколько не зависящих от времени квантовых состояний, которые имеют некоторые из свойств, обычно ожидаемых у вакуумного состояния¹⁾. Вакуум Унру [5] (обозначаемый через ξ) определяется из условия отсутствия падающего потока на горизонт прошлого (\mathcal{H}^-) и световую бесконечность прошлого (\mathcal{J}^-) и приводит к выходящему потоку излучения на бесконечности (на \mathcal{J}^+). Считается, что это состояние достаточно точно воспроизводит условия в поздние моменты времени в (первоначально) вакуумном состоянии хокинговской модели коллапса. Вакуум Израэля—Гиббона—Перри [6, 7] (ν) представляет черную дыру в тепловом равновесии с газом безмассовых частиц на бесконечности. Вакуум Бульвара [8] (η) определяется традиционным образом из требования, чтобы "частицы" имели положительную энергию по отношению к шварцшильдовскому вектору Киллинга. Он описывает ситуацию, когда пространство пусто на бесконечности, но физические условия становятся неправдоподобными вблизи горизонта. Это происходит потому, что траектории Киллинга являются геодезическими на бесконечности, но имеют про-

¹⁾ Фуллинг [4] дал обзор этой ситуации и вычислил тензор напряжений для различных состояний в двумерном аналоге метрики Шварцшильда (см. разд. 3).

извольно большие ускорения вблизи горизонта. (Греческие обозначения ξ , ν и η были предложены в работах [4] и [5].) Каждое из этих состояний соответствует различным ограничениям на константы интегрирования и функцию $\Theta(r)$ в тензоре напряжений.

Статья построена следующим образом. В разд. 2 найдено общее решение уравнений закона сохранения и его разложение, как описано выше. В разд. 3 обсуждается физическое требование конечности на горизонте и рассматривается двумерный аналог этой проблемы. В этом случае мы находим, что величина хокинговского потока определяется следом тензора напряжений, так что для двумерных безмассовых полей эффект Хокинга и конформная аномалия могут быть выведены одна из другой; в этом случае средние значения тензора напряжений в различных интересующих нас состояниях полностью определены. Разд. 4 содержит обзор того, что известно в настоящее время относительно величин конформных аномалий в различных теориях поля. Собирая всю информацию вместе, мы заключаем, что след $T_{\mu\nu}$ для конформно взаимодействующего безмассового скалярного поля в четырехмерной метрике Шварцшильда равен $(2880 \pi^2)^{-1} C^2 = (60 \pi^2)^{-1} M^2 r^{-6}$ и что этот след, вероятно, соответственно больше для нейтринного и электромагнитного полей. В разд. 5 и 6, изучив асимптотическое поведение компонент тензора, мы фиксируем константы интегрирования и получаем информацию относительно функции Θ в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ для различных состояний. Мы получаем сильную зависимость Θ от спина поля, физическое объяснение этого предложено в разд. 7. Разд. 6 содержит точные определения для скалярного поля трех отмеченных вакуумных состояний; разности в их средних значениях сводятся к сходящимся суммам по нормальным модам поля в метрике Шварцшильда. Этот раздел представляет собой основной шаг на пути к прямому вычислению $\langle T_{\mu\nu} \rangle$.

Мы применяем выбор сигнатуры Мизнера–Торна–Уилера¹⁾. Считаем $c = \hbar = 1$ и приписываем размерность длины радиальной и временной координатам, а также "массе" черной дыры M . Применяются стандартные обозначения

$$r^* = r + 2M \ln\left(\frac{r}{2M} - 1\right), \quad \frac{dr}{dr^*} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (1.2)$$

$$v = t + r^*, \quad u = t - r^*, \quad (1.3)$$

множитель $g^{1/2}$ в $T_{\mu\nu}$ не включается.

¹⁾ Имеется в виду книга [27*]. — Прим. перев.

2. ОБЩИЙ ВИД ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

В этом разделе мы найдем наиболее общее решение ковариантных уравнений сохранения

$$\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0 \quad (2.1)$$

в метрике Шварцшильда (1.1) в предположении, что T_μ^ν не зависит от времени, как это было бы в стационарной области вне коллапсирующего тела. Поскольку представляющие наибольший интерес квантовые состояния сферически симметричны, единственно возможные ненулевые компоненты T_μ^ν суть T_r^r , T_t^t , T_r^t , T_t^r , T_θ^θ и T_ϕ^ϕ . Сферическая симметрия приводит также к тому, что $T_\phi^\phi = T_\theta^\theta$ и что T_μ^ν есть функция только от r . При этих условиях уравнения сохранения приобретают вид

$$\partial_r T_r^r + \left[\frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} + \frac{2}{r} \right] T_r^r - \frac{1}{r} T_\theta^\theta - \frac{1}{r} T_\phi^\phi - \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} T_t^t = 0, \quad (2.2a)$$

$$\partial_r T_t^r + \frac{2}{r} T_t^r = 0, \quad (2.2б)$$

$$T_\phi^\phi = T_\theta^\theta. \quad (2.2в)$$

Последнее из них — это просто повторение условия сферической симметрии.

Уравнение (2.2б) может быть решено немедленно:

$$T_t^r = - \frac{K}{M^2 r^2}, \quad (2.3)$$

где K — константа интегрирования.

Компоненту T_t^t следует определить из уравнения для следа

$$T_t^t = -T_r^r - 2T_\theta^\theta + T_\alpha^\alpha. \quad (2.4)$$

Подставляя (2.2в) и (2.4) в (2.2а) и решая дифференциальное уравнение, получаем

$$T_r^r = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left\{ \frac{Q - K}{M^2} + \int \frac{r}{2M} [M T_\alpha^\alpha(r') + 2(r' - 3M) T_\theta^\theta(r')] dr' \right\}. \quad (2.5)$$

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

Формулы (2.2в), (2.3) – (2.5) дают полное решение $\nabla_\nu T_\mu^\nu = 0$ при условиях независимости от времени и сферической симметрии; это решение зависит от двух констант K и Q и двух функций $T_\alpha^\alpha(r)$ и $T_\theta^\theta(r)$. В терминах координаты r^* , определенной в (1.2), мы имеем

$$T_{r^*}^{r^*} = T_r^r, \quad T_t^{r^*} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} T_t^r, \quad T_{r^*}^t = -T_t^{r^*}.$$

Когда применяется r^* , смешанные компоненты тензора равны величинам, имеющим локально физический смысл (компоненты по отношению к ортонормированной системе координат).

Теперь если мы определим

$$\Theta(r) \equiv T_\theta^\theta(r) - \frac{1}{4} T_\alpha^\alpha(r), \quad (2.6)$$

$$H(r) \equiv \frac{1}{2} \int_{2M}^r (r' - M) T_\alpha^\alpha(r') dr' \quad (2.7a)$$

и

$$G(r) \equiv 2 \int_{2M}^r (r' - 3M) \Theta(r') dr', \quad (2.7b)$$

то мы можем записать T_μ^ν в виде

$$T_\mu^\nu = T_\mu^{(1)\nu} + T_\mu^{(2)\nu} + T_\mu^{(3)\nu} + T_\mu^{(4)\nu},$$

где (в координатах t, r^*, θ, φ)

$$T_\mu^{(1)\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H(r) + \frac{1}{2} T_\alpha^\alpha(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} T_\alpha^\alpha(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} T_\alpha^\alpha(r) \end{bmatrix}, \quad (2.8a)$$

$$T_{\mu}^{(2)\nu} = \frac{K}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.86)$$

и

$$T_{\mu}^{(3)\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} G(r) - 2\Theta(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} G(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Theta(r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Theta(r) \end{bmatrix}, \quad (2.8b)$$

$$T_{\mu}^{(4)\nu} = \frac{Q}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.8r)$$

Все четыре эти тензора удовлетворяют уравнению $\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = 0$. Только $T_{\mu}^{(1)\nu}$ имеет ненулевой след, только $T_{\mu}^{(2)\nu}$ имеет внедиагональные компоненты (поток) и только $T_{\mu}^{(3)\nu}$ имеет бесследовую часть $\left(T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{4} T_{\alpha\beta}^{\alpha\beta} g_{\mu}^{\nu}\right)$, у которой $\theta\theta$ -компонента отлична от нуля. Таким образом, остается рассмотреть только последнее из четырех условий, указанных в разд. 1. Можно показать (см. приложение и [12]), что T_{μ}^{ν} , измеряемый в локальной системе отсчета на горизонте будущего, будет конечен, если T_{θ}^{θ} , $T_{\nu\nu}$ и $T_t^t + T_{r*}^{r*}$ конечны при $r \rightarrow 2M$ и

$$\lim_{r \rightarrow 2M} (r - 2M)^{-2} |T_{uu}(r)| < \infty. \quad (2.9)$$

Геометрически один из этих множителей $(r - 2M)^{-1}$ происходит из нормировки векторов базиса ("бесконечное растяжение времени"), а другой появляется из-за перехода от системы отсчета, связанной с вектором Киллинга, к системе отсчета наблюдателя, пересекающего горизонт с конечной скоростью ("бесконечное красное смещение"). Мы легко находим, что

$$T_{uu} = \frac{1}{4}(T_{tt} + T_{r^*r^*} - 2T_{tr^*}) = \frac{1}{2r^2} \left(\frac{Q}{M^2} + G + H \right) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \times \\ \times \left(\Theta - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} \right) = \frac{1}{2r^2} \left[\frac{Q}{M^2} + O((r - 2M)^2) \right]; \quad (2.10)$$

последнее равенство очевидно следует из определений G и H . Следовательно, условие (2.9) эквивалентно $Q = 0$, т.е. $T_{\mu}^{(\mu)} \nu$ сингулярно на горизонте будущего, а другие слагаемые — нет. (Регулярность T_{μ}^{ν} на горизонте прошлого требует, чтобы $(r - 2M)^{-2} T_{\nu\nu}$ оставалось там конечным. Так как $T_{\nu\nu} = T_{uu} - K/M^2 r^2$, это условие переходит в $Q = 2K$.)

Отметим, наконец, что уравнения этого раздела применимы к любым квантовым полям. Только тогда, когда мы будем специализировать $T_{\alpha}^{\alpha}(r)$ (см. разд. 4), нам придется выбрать конкретную теорию поля.

3. ДВУМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Двумерная задача Хокинга для безмассового скалярного поля¹⁾ и коллапсирующего тела с внешней метрикой

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 \quad (3.1)$$

была решена точно (см. [5], разд. 1 и [16, 12, 9]). Здесь мы покажем, что результаты этих вычислений могут быть также получены из некоторых общих физических соображений плюс численное значение некоторой величины, которая может быть или коэффициентом в хокинговской формуле для температуры, $kT = (8\pi M)^{-1}$, или коэффициентом в общей формуле для аномалии следа двумерного скалярного поля $T_{\alpha}^{\alpha} = (2\pi)^{-1} R$.

Анализ разд. 2 легко воспроизводится для метрики (3.1). Уравнения закона сохранения для не зависящего от времени T_{μ}^{ν} суть

$$\partial_r T_t^r = 0, \quad (3.2a)$$

$$\partial_r T_r^r = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} (T_t^t - T_r^r). \quad (3.2b)$$

¹⁾ При анализе безмассового свободного скалярного поля в двумерном пространстве-времени следует иметь в виду известные трудности, связанные с его инфракрасной сингулярностью. В плоском пространстве-времени, строго говоря, такого поля не существует (см., например, [28*]). — Прим. перев.

Уравнение (3.2б) эквивалентно

$$\partial_r \left[\left(1 - \frac{2M}{r} \right) T_r^r \right] = \frac{M}{r^2} T_\alpha^\alpha.$$

Если

$$H_2(r) \equiv M \int_{2M}^r (r')^{-2} T_\alpha^\alpha(r') dr', \quad (3.3)$$

то общее решение в духе выражений (2.8) есть

$$T_\mu^\nu = T_\mu^{(1)\nu} + T_\mu^{(2)\nu} + T_\mu^{(3)\nu},$$

где (в координатах t, r^*)

$$T_\mu^{(1)\nu} = \begin{pmatrix} -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H_2(r) + T_\alpha^\alpha(r) & 0 \\ 0 & \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} H_2(r) \end{pmatrix}, \quad (3.4a)$$

$$T_\mu^{(2)\nu} = \frac{K}{M^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.4b)$$

и

$$T_\mu^{(3)\nu} = \frac{Q}{M^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.4b)$$

Произвольная функция Θ в этом случае отсутствует.

Для того чтобы проинтегрировать эти выражения, напомним, что при нашем выборе сигнатуры T_t^t отрицательна (T^{tt} положительна) для классической материи, а T_r^r положительна для материи, движущейся в положительном r -направлении. В двумерном плоском пространстве плотность энергии газа безмассовых бозонов (с нулевым спином и зарядом и без внутренних степеней свободы) в тепловом равновесии равна

$$T_{tt}^{(e)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|p| dp}{e^{|p|/kT} - 1} = \frac{\pi}{6} (kT)^2.$$

Плотность энергии пучка безмассовых квантов, излученных черной дырой и двигающихся в положительном r -направлении, в точности

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

равна половине ($p > 0$) этого интеграла, и той же величине равен поток. Таким образом, тензор напряжений равновесного газа есть

$$T_{\mu}^{(e)\nu} = \frac{\pi}{12} (kT)^2 \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

а тензор излучения

$$T_{\mu}^{(r)\nu} = \frac{\pi}{12} (kT)^2 \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Аргументация Хокинга [3] о том, что коллапсирующее тело должно излучать с эффективной температурой на бесконечности, равной $kT = (8\pi M)^{-1}$, остается справедливой в двумерном случае. Более того, вследствие конформной инвариантности и конформной плоскости рассеяние безмассовых частиц или волн на геометрии в двумерном случае отсутствует, и, следовательно, тензор напряжений на бесконечности дается в точности выражением (3.6) без усложнений, вызванных коэффициентами излучения — поглощения, отличными от единицы. Сравнивая это с выражениями (3.4) в пределе ($r \rightarrow \infty$), мы видим, что тензор напряжений в задаче Хокинга в стационарной области должен иметь

$$K = (768 \pi)^{-1}. \quad (3.7)$$

Однако $T_{\mu}^{(2)\nu}$ сам по себе не является полным тензором напряжений, поскольку его диагональные компоненты имеют неправильный знак. Действительно, $T_{\mu}^{(2)\nu}$ с $K > 0$ представлял бы отрицательную энергию, втекающую в черную дыру. (Мы имеем $T_{uu}^{(2)} = 0$, $T_{vv}^{(2)} = -K/M^2$.)

Если $T_{\alpha}^{\alpha}(r) = 0$ везде, то единственный способ получить асимптотику вида (3.6) — это взять $Q = 2K$. (Тогда $T_{uu} = K/M^2$, $T_{vv} = 0$.) Это было бы единственным выходом, если бы хокинговский поток состоял из классического излучения безмассовых квантов (которые заведомо рождались бы внутри или в непосредственной близости от коллапсирующего тела). Интенсивность такого излучения становилась бы бесконечной на горизонте, так как условие (2.9) было бы нарушено. Совершенно невероятно, чтобы среднее значение квантового T_{μ}^{ν} в первоначально вакуумном состоянии вело себя подобным образом, поскольку и начальные условия, определяющие вакуум, и геометрия на горизонте и в области прошлого по отношению к горизонту вполне регулярны. Неоднозначность (vagaries) перенормировки не позволяет сделать этот довод строгим, и сложилась спорная ситуация: со-

гласно взглядам одной школы, перенормированный $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ становится сингулярным на горизонте [10], тогда как другая считает, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ вообще не имеет инвариантного смысла [11]. Однако вычисления в двумерных моделях поддерживают надежду, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ хорошо определен и несингулярен, и в настоящей статье мы принимаем эту точку зрения.

Тензор с $Q = 2K \neq 0$ и $T_\alpha^\alpha = 0$ также неприемлем для вакуума Унру ξ , так как в противоречии со смыслом определения этого состояния T_{uu} не обращается в нуль на горизонте прошлого.

Разрешение этих трудностей состоит в том, что T_μ^ν на самом деле имеет след, даже если уравнения поля конформно-инвариантны. При $Q = 0$ полная плотность энергии [из уравнений (3.4а) и (3.4в)] стремится тогда к $H_2(\infty) - T_\alpha^\alpha(\infty) = K/M^2$ при $r \rightarrow \infty$. Можно ожидать, что почти для любого типа полей эта величина больше или равна асимптотическому потоку K/M^2 . (Поскольку излучение, достигающее \mathcal{J}^+ , находится в истинном термическом состоянии, отсутствуют квантовые корреляции, которые могли бы нарушить классические ограничения на энергию.) Таким образом, $T_\alpha^\alpha(r)$ не может быть тождественно равным нулю.

Для поля, описывающего безмассовые частицы (для которого применима формула (3.6)), плотность и поток в действительности равны, так что

$$K = \frac{1}{2} M^2 [H_2(\infty) - T_\alpha^\alpha(\infty)] = \frac{1}{2} M^3 \int_{2M}^{\infty} (r')^{-2} T_\alpha^\alpha(r') dr', \quad (3.8)$$

поскольку в этом случае $T_\alpha^\alpha(\infty)$ должен обращаться в нуль.

Это уравнение связывает эффект Хокинга со следом T_μ^ν . В случае двумерного конформно-инвариантного поля, как объяснялось в разд. 1 и более подробно в разд. 4, ожидается, что след должен быть пропорционален скаляру кривизны, который отличен от нуля для редуцированной метрики Шварцшильда (3.1):

$$T_\alpha^\alpha = \alpha R = 4\alpha M r^{-3}. \quad (3.9)$$

Таким образом, имеем

$$H_2(r) = \frac{\alpha}{16 M^2} - \frac{\alpha M^2}{r^4}, \quad (3.10)$$

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

поэтому $\alpha = 32K$. С учетом (3.7) это дает $\alpha = (24\pi)^{-1}$, в согласии с общей теорией (см. разд. 4). Таким образом, мы вывели конформную аномалию из эффекта Хокинга.

Обратно, зная T_{α}^{α} , можно вычислить поток Хокинга K . На самом деле даже качественная природа этого эффекта могла бы быть предсказана из знания аномалии следа. То, что условия на \mathcal{J}^+ асимптотически стремятся к стационарному состоянию, предсказывается классическим соображением о замедлении времени для процессов в черной дыре. Если $K \neq \alpha/32$, то $T_{vv} \neq 0$ в стационарной области. При больших r след T_{μ}^{μ} мало отличается от нуля, так что закон сохранения приводит к тому, что T_{vv} не зависит от u . Это означает, что выходящий поток может быть обращен назад на \mathcal{J}^- , что противоречит начальным условиям задачи.

Универсальность эффекта Хокинга и приведенные выше аргументы приводят к тому, что все двумерные конформно-инвариантные бозонные теории поля имеют одинаковый коэффициент конформной аномалии α с точностью до множителя, учитывающего число различных типов частиц в теории и их спинные и зарядовые состояния. (Этот множитель входит в (3.6).) Для фермионов для вычисления $T_{\mu}^{(\epsilon)}$ следует применять вместо распределения Бозе-Эйнштейна распределение Ферми-Дирака.

Наконец, мы можем выделить из уравнений (3.4) тензоры напряжений для вакуумных состояний Израэля и Бульвара (см. разд. 1) полной двумерной шварцшильдовской черной дыры. Первый регулярен и на горизонте прошлого и на горизонте будущего ($2K = Q = 0$), поэтому он в точности равен $T_{\mu}^{(1)\nu}$. На бесконечности он стремится к равновесному виду (3.5). Физический смысл отрицательного потока $T_{vv}^{(2)}$ теперь ясен: он отражает отсутствие у ξ -вакуума по сравнению с v -вакуумом движущейся внутрь половины излучения в равновесном распределении.

Напряжение η -вакуума должно исчезать на бесконечности. Ясно, что оно должно быть равно

$$T_{\mu}^{(1)\nu} + T_{\mu}^{(3)\nu} \text{ с } Q = -M^2 H_2(\infty) = -\alpha/16 = -(384\pi)^{-1}.$$

Поскольку $Q \neq 0$, этот тензор сингулярен на горизонте. Однако он действительно представляет собой среднее значение напряжения в вакууме вне стабильного тела массы M радиуса, больше чем $2M$. Отметим, что $-T_{\mu}^{(3)\nu}$, разность между напряжением состояний Из-

разля и Бульвара, есть классическое обобщение равновесного распределения (3.6) на статическое пространство-время; эффективная локальная температура равна $T(g_{tt})^{-1/2}$.

Выражения, полученные здесь для тензоров напряжений различных состояний, находятся в полном согласии с выражениями, полученными прямым вычислением в работе [4]. Наша цель состоит в том, чтобы обобщить рассмотрения этого раздела на четырехмерный случай настолько далеко, насколько это возможно.

4. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ

Для того чтобы объяснить, как мы собираемся фиксировать вид $T_{\alpha}^{\alpha}(r)$ в некоторой конкретной теории поля, нам нужно сделать обзор того, что такое аномалии следов в общем случае. Рассмотрим функционал действия $S[\Phi]$, который инвариантен относительно общекоординатных преобразований и относительно конформных преобразований вида

$$\begin{aligned}g_{\mu\nu} &\rightarrow \Omega^2(x)g_{\mu\nu}, \\ \Phi(x) &\rightarrow \Omega^n(x)\Phi(x),\end{aligned}$$

где $\Omega(x)$ — некоторая произвольная функция в пространстве-времени, и n -число, зависящее от рассматриваемого поля Φ . Инвариантность относительно общекоординатных преобразований требует, чтобы $\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$, а конформная инвариантность дает $T_{\alpha}^{\alpha} = 0$.

Когда квантуют поле Φ в некотором фиксированном искривленном пространстве-времени, то получают, что вакуумное среднее значение $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ бесконечно. Естественный следующий шаг состоит в том, чтобы выбрать метод регуляризации, который выделяет расходимости некоторым физически осмысленным способом. Существует два метода регуляризации и перенормировки предположительно применимые к задачам в искривленном пространстве-времени — размерная регуляризация и ковариантное разделение точек вдоль геодезической. Первый из них сохраняет условие $\nabla_{\nu}T_{\mu}^{\nu} = 0$ повсюду. Однако процесс аналитического продолжения на произвольные комплексные размерности и разложение около полюса в размерности 4 приводят к тому, что тензор напряжений для конформно-инвариантной теории имеет ненулевой след. Процедура разделения точек, которая включает разложение $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$ по степеням вектора, касательного к геодезической, проходящей через точку x , также дает некоторый след,

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

после того как избавляются от членов, зависящих от направления. Член, который возникает в перенормированном операторе тока таким способом, в нарушение классического тождества называется аномалией. Аномалии появляются в различных квантовых теориях поля и имеют экспериментально проверяемые следствия [13].

Относительно мало было сделано для того, чтобы установить точные значения аномалий следов для различных теорий, но мы увидим, что в настоящее время имеется как раз достаточно информации, для того чтобы мы сумели найти их вид в конформно-инвариантной теории безмассового скалярного поля в двух и четырех измерениях.

В рамках размерной регуляризации Дезер, Дафф и Айшем [14] показали, что общий вид аномалий в перенормированном тензоре напряжений есть

$$T_{\alpha}^{\alpha} = k_1 C^2 + k_2 (R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2) + k_3 \square R + k_4 R^2 \quad (4.1)$$

в четырех измерениях и

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \alpha R \quad (4.2)$$

в двух измерениях. Их общие аргументы не определяют безразмерные константы k_i и α . Следующее соображение приводит к выводу, что $k_4 = 0$. В модели пространства-времени Робертсона-Уолкера можно определить вакуумное состояние, для которого тензор напряжений должен быть по построению однородным и изотропным. Исследование [15] закона сохранения при этих условиях (аналогично разд. 2 этой статьи) показывает, что не существует сохраняющейся однородной изотропной тензорной функции вида, который может возникнуть при вычислениях методом разделения точек, со следом, являющимся линейной комбинацией $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ и R^2 , другой, кроме как кратной $R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2$. Так как k_i одинаковы для всех квантовых состояний и всех моделей пространства-времени, член с R^2 не должен появляться в (4.1).

В этом месте можно задать вопрос, не являются ли эти аномалии артефактом выбранного метода регуляризации. К счастью, многие результаты были получены различными методами и согласуются между собой. Ситуация для двумерного безмассового скалярного поля достаточно хорошо выяснена и позволяет нам сделать важные выводы относительно четырехмерного случая. Интегрирование по

функциям мод в определении $T_{\mu\nu}$, регуляризованного методом ковариантного разделения точек, выполняется явно для произвольной двумерной метрики [16, 17]. Результат показывает, что в уравнении (4.2)

$$\alpha = (24\pi)^{-1}; \quad (4.3)$$

на самом деле любое другое значение не согласуется с законом сохранения. Это число появляется так же в двумерном аналоге [18] общего вычисления Кристенсена $\langle \text{out, vac} | T_{\mu\nu} | \text{in, vac} \rangle$ для массивного скалярного поля методом разделения точек [19]. Вычисления Кристенсена не применимы непосредственно к безмассовому случаю, поскольку они включают разложение по обратным степеням массы. Однако имеется определенный член, не зависящий от массы, содержащий производные метрики порядка 2ω (размерность пространства-времени), который имеет неисчезающий след. Этот член есть

$$-\frac{1}{24\pi} R \frac{\sigma_\mu \sigma_\nu}{\sigma^\rho \sigma_\rho} \quad (4.4)$$

в двумерном случае, и

$$-\frac{1}{2880\pi^2} \left(C^2 + R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 + \square R \right) \frac{\sigma_\mu \sigma_\nu}{\sigma^\rho \sigma_\rho} \quad (4.5)$$

в четырехмерном, где σ_μ — касательный вектор к геодезической, применяемый в методе разделения точек. В вычислениях этот член возникает, как сумма вклада типа $g_{\mu\nu}/2\omega$ от слагаемого в $T_{\mu\nu}$, которое явно зависит от массы ($-\frac{1}{2} m^2 \Phi^2 g_{\mu\nu}$) и вклада типа

$$\frac{\sigma_\mu \sigma_\nu}{\sigma^\rho \sigma_\rho} - \frac{1}{2\omega} g_{\mu\nu} \quad (4.6)$$

от слагаемого в $T_{\mu\nu}$, которое имеет такой же вид, как в безмассовом случае (например, в двумерном случае $\partial_\mu \Phi \partial_\nu \Phi - \frac{1}{2} \partial_\rho \Phi \partial^\rho \Phi g_{\mu\nu}$). Общая идеология метода разделения точек, что физически существенные члены — это те, которые не зависят от σ_μ , наводит тогда на мысль, что члены, связанные с $-g_{\mu\nu}/2\omega$ в (4.6), являются источником аномалии следа. Мы поэтому заключаем, что

$$k_1 = k_2 = k_3 = (2880\pi^2)^{-1}. \quad (4.7)$$

Эта интерпретация подтверждается явным вычислением суммы по модам для массивного поля в двумерном пространстве-времени Ро-

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

бертсона–Уолкера [20], где видно, что аномальный член в соответствующей безмассовой теории [17] сокращается с членом от $-(1/2)m^2\Phi^2 g_{\mu\nu}$ описанным способом.

В четырех измерениях проделаны два вычисления в рамках метода размерной регуляризации, которые позволяют проверить часть из соотношений (4.7). Первое – это вычисление Даукера и Критчли [21] тензора напряжений для конформно-инвариантного безмассового скалярного поля в пространстве де Ситтера радиуса a . Они нашли, что

$$T_{\alpha}^{\alpha} = -\frac{1}{240\pi^2 a^4} = \frac{1}{2880\pi^2} \left(R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} - \frac{1}{3} R^2 \right),$$

что подтверждает соотношение для k_2 в уравнении (4.7), так как в пространстве де Ситтера $C^2 = \square R = 0$.

Во-вторых, в методе размерной регуляризации в импульсном пространстве бесконечный контрчлен, который следует добавить к первоначальному лагранжиану для того, чтобы устранить расходимости от скалярного, нейтринного и фотонного вкладов в собственную энергию гравитона, имеет вид

$$\Delta\mathcal{L}(\omega) = \frac{1}{2 - \omega} \frac{N(s)g^{1/2}}{24(4\pi)^2(4\omega^2 - 1)} \left[\frac{1}{2} \omega R^2 - (2\omega - 1) R^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \right],$$

где $N(s) = 1, 3$ и 12 для спина $(s) = 0, 1/2$ и 1 соответственно. Отсюда, согласно Капперу и Даффу [22], получаем $\square R$ -аномалию следующим образом: разложим зависящую от ω часть коэффициента перед $(2 - \omega)^{-1}$ около точки $\omega = 2$. Получившееся конечное выражение будет содержать некоторый член, который не конформно инвариантен, $\Delta\mathcal{L}_{\text{аном}}$. Выпишем действие $S_{\text{аном}}$, соответствующее $\Delta\mathcal{L}_{\text{аном}}$, и построим тензор напряжений

$$T_{\text{аном}}^{\mu\nu} = 2g^{-1/2} \delta S_{\text{аном}} / \delta g_{\mu\nu},$$

где $\delta / \delta g_{\mu\nu}$ – функциональная производная по метрике. След $T_{\text{аном}}^{\mu\nu}$ дает $\square R$ -аномалию. Следуя этой процедуре, находим, что

$$T_{\alpha}^{\alpha} = \frac{N(s)}{2880\pi^2} \square R,$$

так что для скалярного поля $k_3 = (2880\pi^2)^{-1}$, как и ожидалось. Для поля нейтрино это число будет в 3 раза, а для электромагнитного поля в 12 раз больше.

В четырехмерной метрике Шварцшильда, где $R_{\alpha\beta} = R = 0$ для нейтрального конформно-инвариантного безмассового скалярного поля мы поэтому получим

$$T_{\alpha}^{\alpha}(r) = \frac{1}{2880\pi^2} C^2 = \frac{1}{60\pi^2} \frac{M^2}{r^6}. \quad (4.8)$$

Поскольку полный (нелокальный) эффективный лагранжиан, по-видимому, содержит $N(s)$ как общий множитель, кажется правдоподобным, что коэффициенты k_1 для скалярного, нейтринного и электромагнитного полей связаны тем же соотношением 1 : 3 : 12, что и коэффициенты k_3 [23]¹⁾.

Наконец, следует отметить, что можно ожидать, что коэффициенты в аномалии определяются однозначно, так как в $T_{\mu\nu}$ отсутствуют расходящиеся члены с одинаковыми следами, которые могли бы привести к неоднозначности [24]. Кроме того, когда в теории имеются несколько невзаимодействующих полей, эти коэффициенты (и весь тензор напряжений в целом) аддитивны. Соображения, приведенные в этом разделе, носят предварительный характер. Нужны будут детальные вычисления²⁾, для того чтобы надежно определить значения всех коэффициентов аномалии и сделать соотношение между массивными и безмассовыми теориями совершенно ясным. В любом случае основные выводы настоящей статьи не зависят от точных значений коэффициентов.

5. ФИЗИЧЕСКИЕ ТРЕБОВАНИЯ НА ТЕНЗОР НАПРЯЖЕНИЙ ВАКУУМА

В этом разделе мы проверим, обладают ли выражения (2.8) свойствами, ожидаемыми от $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$, определенными соответственно трем типам статических вакуумных состояний для шварцшильдовского пространства-времени без коллапсирующего тела. Как отмечалось ранее, считается, что ξ -вакуум должен быть хорошим приближением при поздних временах для $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ вне тела, коллапсирующего, начиная с относительно неподвижной конфигурации, в которой оно было первоначально окружено пустым пространством.

¹⁾ Однако, после того как рукопись этой статьи была завершена, мы получили с помощью прямого вычисления, что k_1 для поля нейтрино в 7/4 раза больше, чем для скалярного поля.

²⁾ См. по этому поводу [29*]. — Прим. перев.

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

Сразу ясно, что соотношение между аномалией следа и потоком Хокинга не будет таким же тесным, как в двух измерениях из-за наличия в решении (2.8) неизвестной функции Θ . Мы будем рассматривать коэффициент аномалии и асимптотический поток как вычисляемые независимо и применим это для того, чтобы получить информацию относительно Θ .

Тензор $T_{\mu}^{(1)\nu}$ [см. (2.8a)] будет один и тот же для всех вакуумных состояний данного безмассового поля. Из уравнений (4.8) и (2.7a) имеем

$$\begin{aligned} T_t^{(1)t} &= \frac{\beta}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(-\frac{3}{640} + \frac{5M^4}{8r^4} - \frac{11M^5}{10r^2}\right), \\ T_r^{(1)r} &= \frac{\beta}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{3}{640} - \frac{M^4}{8r^4} + \frac{M^5}{10r^5}\right), \\ T_r^{(1)r} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{\beta}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{3}{640} - \frac{3M^4}{8r^4} + \frac{3M^5}{5r^5}\right), \\ T_{\theta}^{(1)\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{\beta}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left(\frac{M^4}{4r^4} - \frac{M^5}{2r^5}\right), \end{aligned} \quad (5.1)$$

где β^{-1} равно $60 \pi^2$ для нейтрального скалярного поля и (как рабочая гипотеза, применяемая только в разд. 7) $20 \pi^2$ для нейтрино и $5 \pi^2$ для фотонов, в соответствии с обсуждением в разд. 4.

Среднее значение T_{μ}^{ν} по ξ -вакууму должно иметь вид

$$T_{\mu}^{(\xi)\nu} \equiv \langle \xi | T_{\mu}^{\nu} | \xi \rangle = T_{\mu}^{(1)\nu} + T_{\mu}^{(2)\nu} [K_{\xi}] + T_{\mu}^{(3)\nu} [\Theta_{\xi}], \quad (5.2)$$

так как это состояние регулярно на горизонте будущего ($Q_{\xi} = 0$). Яркость (полная мощность, излученная черной дырой) есть

$$L = \int_{\text{больше } r} r^2 \sin \theta d\theta d\phi \langle T_{r*}^t \rangle = \frac{4\pi K_{\xi}}{M^2}. \quad (5.3)$$

Единственная материя, которая присутствует в асимптотической области — это выходящий поток безмассового излучения, так что главные члены (порядка r^{-2}) T_r^r и $-T_t^t$ должны там быть равными T_{r*}^t . Рассматривая rr - и tt -компоненты трех членов в уравнении (5.2), мы видим, что

$$M^2 G_{\xi}(\infty) = 2K_{\xi} - \frac{3\beta}{640}, \quad (5.4)$$

где $G_\xi(r)$ определяется по $\Theta_\xi(r)$ с помощью уравнения (2.7). Это уравнение аналогично уравнению (3.8) и является одним из условий, которым должна удовлетворять Θ_ξ . Мы сопоставим его с некоторыми вычисленными значениями K_ξ в разд. 7.

Что еще мы можем сказать здесь относительно Θ_ξ ? Асимптотически она должна быть равна трансверсальному давлению T_θ^θ излучения. Эта величина отлична от нуля для излучения от источника конечных эффективных размеров. Частица с 4-импульсом p^μ дает вклад в $T_{\mu\nu}$, пропорциональный $p_\mu p_\nu$. В плоском пространстве наблюдателю, находящемуся на расстоянии r , излучающее тело радиуса b представляется диском. Частицы, приходящие к наблюдателю от краев диска, имеют $p_\theta/p_r \approx b/r$, и поэтому

$$\frac{T_\theta^\theta}{T_r^r} \approx \left(\frac{b}{r}\right)^2 \left(T_r^r \sim \frac{L}{4\pi r^2}\right).$$

Для частиц, вылетающих из областей, более близких к центру диска, это отношение меньше. Эту аргументацию можно обобщить на черные дыры: тщательный анализ орбит безмассовых частиц в метрике Шварцшильда показывает, что излучающее тело радиуса, несколько больше чем $2M$, представляется удаленному наблюдателю диском эффективного радиуса $\sqrt{27} M$ [25]. Этот вывод применим также к излучению Хокинга, вид которого на бесконечности определяется теми же коэффициентами излучения, которые описывают распространение классических волн от $r \approx 2M$ до бесконечности (см. [1] и [3]). Поэтому мы предполагаем, что при $r \rightarrow \infty$

$$\Theta_\xi(r) \sim \lambda K_\xi / r^4 \quad (0 < \lambda \leq 27). \quad (5.5)$$

(Этот коэффициент не зависит от M , потому что убывание углового расхождения при $M \rightarrow 0$ компенсируется возрастанием температуры и поэтому яркости.)

Вернемся теперь к η -вакууму. Так как это состояние определяется обычным образом относительно вектора Киллинга, касательного к геодезическим траекториям на бесконечности, оно должно представлять пустое в существенном пространство для достаточно больших r . Поэтому ожидается, что компоненты $T_\mu^{(\eta)\nu}$ убывают быстрее, чем компоненты $T_\mu^{(\xi)\nu}$ при $r \rightarrow \infty$, и также исчезают при $M \rightarrow 0$. По аналогии с двумерным случаем на самом деле кажется вероятным, что все компоненты убывают так же быстро, как след (например, как $M^2 r^{-6}$). С другой стороны, $T_\mu^{(\eta)\nu}$, по-видимому, не регулярно на горизонте будущего. В самом деле, мы должны учитывать возможность того, что $\Theta_\eta(r)$ ведет себя при $r \rightarrow 2M$ так плохо, что интеграл (2.76),

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

определяющий $G_\eta(r)$, расходится. Сравнивая выражения (2.8в) и (2.8г), видим, что изменение нижнего предела в этом интеграле сводится просто к переопределению Q . Давайте поэтому в данном случае применим определение

$$G_\eta(r) = 2 \int_{-\infty}^r (r' - 3M) \Theta_\eta(r') dr'. \quad (5.6)$$

С этим подразумеваемым изменением в обозначениях мы имеем

$$T_\mu^{(\eta)\nu} = T_\mu^{(1)\nu} + T_\mu^{(3)\nu} [\Theta_\eta] + T_\mu^{(4)\nu} [Q_\eta]$$

(где $T_\mu^{(3)\nu} [\Theta_\eta]$ не удовлетворяет условию (2.9)). Так как $T_r^{(\eta)r}$ и $T_t^{(\eta)t}$ должны на бесконечности исчезать, получаем

$$Q_\eta = -3\beta/640. \quad (5.7)$$

Наконец, ν -вакуум должен быть регулярен на горизонте и инвариантен относительно обращения времени:

$$T_\mu^{(\nu)\nu} = T_\mu^{(1)\nu} + T_\mu^{(3)\nu} [\Theta_\nu]. \quad (5.8)$$

Кроме того, физические условия на пространственной бесконечности в этом состоянии должны соответствовать тепловому равновесию при температуре Хокинга. Следовательно, $T_\theta^{(\nu)\theta}$, $T_r^{(\nu)r}$ и $-\frac{1}{3} T_t^{(\nu)t}$ все должны стремиться к

$$\Theta_\nu(\infty) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/kT} - 1} = \frac{\pi^2}{90} (kT)^4 = \frac{1}{90} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^4} \quad (5.9)$$

при $r \rightarrow \infty$ в случае нейтрального скалярного поля. В других случаях это выражение следует умножить на число независимых состояний заряда и спиральности (например, на 2 для электромагнитного поля). Для фермионов появляется дополнительный множитель 7/8, так как

$$\int_0^\infty \frac{p^3 dp}{e^{p/kT} + 1} = \frac{7\pi^4}{120} (kT)^4. \quad (5.10)$$

Для того чтобы получить правильное поведение для всех компонент $T_\mu^{(\nu)\nu}$, достаточно предположить его для Θ_ν , так как

$$\lim_{r \rightarrow \infty} [T_r^{(\nu)r}(r) - \frac{1}{4} T_\alpha^\alpha(r)] = \lim_{r \rightarrow \infty} r^{-2} G_\nu(r) = \Theta_\nu(\infty). \quad (5.11)$$

В приблизительно плоской области вдали от черной дыры, где квантовые эффекты локальной кривизны пространства-времени пренебре-

жимо малы, можно было бы ожидать, что тензор энергии-импульса принимает классический равновесный вид, характеризуемый зависящей от расстояния температурой

$$T(r) = T(g_{tt})^{-1/2} = T \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1/2}. \quad (5.12)$$

Это предположение самосогласовано в том смысле, что если мы примем, что

$$T_{\theta}^{(\nu)\theta}(r) = \Theta_{\nu}(\infty) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \left[1 + O\left(\frac{M^3}{r^3} \right) \right], \quad (5.13a)$$

то получим

$$T_r^{(\nu)r}(r) = \Theta_{\nu}(\infty) \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-2} \left[1 + O\left(\frac{M^2}{r^2} \right) \right]. \quad (5.13b)$$

Как тензор напряжений должен вести себя на горизонте, физически менее ясно, чем на бесконечности. Однако аналогии с двумерным случаем и с ситуацией на бесконечности приводят к некоторой модели такого поведения, которая будет подтверждена рассмотрениями разд. 6.

В двух измерениях бесследовая часть тензора напряжений вакуума Израэля (3.4a) линейно стремится к нулю, когда r стремится к $2M$:

$$\begin{aligned} T_r^{(\nu)r} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} H_2(r) - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha} = \alpha \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \times \\ &\times \left(-\frac{1}{16M^2} + \frac{2M}{r^3} - \frac{3M^2}{r^4} \right) = -\frac{\alpha}{16M^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \times \\ &\times \left(1 + \frac{4M}{r} + \frac{12M^2}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Кроме того, компоненты этого тензора в ортонормальной системе координат на (или вне) горизонта исчезают при приближении к точке пересечения горизонтов прошлого и будущего (см. приложение). Эти результаты согласуются с интуитивным представлением (см. [4] и [6]), что ν -вакуум является по построению таким состоянием, которое описывает максимально пустое пространство в окрестности этой точки; законы сохранения и кривизна пространства приводят к тому, что это состояние перестает быть пустым как только мы выходим из этой

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

точки. Поэтому кажется разумным ожидать, что в четырех измерениях все компоненты $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} g_{\mu}^{\nu}$ при $r \rightarrow 2M$ будут в низшем порядке пропорциональны $1 - 2M/r$. В приложении показано, что если $\Theta_{\nu} \equiv T_{\theta}^{(\nu)\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$ удовлетворяет этому условию, то все остальные компоненты также ему удовлетворяют.

По аналогии с двумерным случаем, бесследовые части тензоров напряжений вакуумов Унру и Бульвара должны быть отрицательными вблизи горизонта. По причинам, которые будут объяснены в следующем разделе, мы также ожидаем, что в этом пределе Θ_{ξ} стремится к константе, $T_r^{(\xi)r} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$ стремится к $(1 - 2M/r)^{-1}$ и все компоненты $T_{\mu}^{(\eta)\nu} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} g_{\mu}^{\nu}$ стремятся к $(1 - 2M/r)^{-2}$. Легко можно проверить, что все эти утверждения согласуются со структурой выражений (2.8) и что для членов в $T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ порядка $(1 - 2M/r)^{-2}$ справедлив аналог уравнений (5.11).

Предсказываемые асимптотики (включающие предположения о знаках, но не о численных коэффициентах) суммированы в табл. 1. Отметим, что $1 - 2M/r$ играет на горизонте роль, в точности аналогичную той, которую играет r^{-2} на бесконечности, с перестановкой $|\nu\rangle$ и $|\eta\rangle$. Эта симметрия естественно возникнет в вычислениях разд. 6.

Таблица 1

Ожидаемое асимптотическое поведение средних значений
(численные множители опущены)

Состояние	$r \rightarrow \infty,$ $T_r^r - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha}$	$r^* \rightarrow \infty,$ $T_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$	$r \rightarrow 2M,$ $T_r^r - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$	$r^* \rightarrow -\infty,$ $T_{\theta}^{\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$
$ \nu\rangle$	+1	+1	$+\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$	$+\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$
$ \xi\rangle$	$+r^{-2}$	$+r^{-4}$	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}$	-1
$ \eta\rangle$	$-r^{-6}$	$-r^{-6}$	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}$	$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}$

6. РАЗНОСТИ ВАКУУМНЫХ СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЙ

Здесь мы начнем решение задачи о фактическом вычислении $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ с решения уравнений скалярного поля в метрике Шварцшильда. Мы начнем решение с самого начала и продвинемся достаточно далеко, для того чтобы обосновать утверждения, которые были сделаны в разд. 5 на основе абстрактных аргументов различной степени физической убедительности. Мы сосредоточимся на разности между средними значениями $T_{\mu}^{(\nu)\nu}$, $T_{\mu}^{(\xi)\nu}$ и $T_{\mu}^{(\eta)\nu}$.

Формальное выражение (симметризованное) для тензора энергии импульса конформно-инвариантного безмассового эрмитова скалярного поля во внешнем гравитационном поле с $R_{\mu\nu} = 0$ есть

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{3} (\nabla_{\nu}\Phi\nabla_{\nu}\Phi + \nabla_{\nu}\Phi\nabla_{\mu}\Phi) - \frac{1}{6} (g^{\alpha\beta}\nabla_{\alpha}\Phi\nabla_{\beta}\Phi)g_{\mu\nu} - \frac{1}{6} [(\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi) + \Phi\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\Phi]. \quad (6.1)$$

Если поле разложено по полному набору положительно нормированных модовых функций u_j и их комплексно сопряженных и коэффициенты рассматриваются как операторы уничтожения и рождения, то среднее значение по соответствующему "вакуумному" состоянию равно

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \sum_j T_{\mu\nu}[u_j, u_j^*], \quad (6.2a)$$

$$T_{\mu\nu}[u, u^*] = 2 \operatorname{Re} \left[\frac{1}{3} \nabla_{\mu}u\nabla_{\nu}u^* - \frac{1}{6} (\nabla_{\mu}\nabla_{\nu}u)u^* \right] - \frac{1}{6} (\nabla^{\alpha}u\nabla_{\alpha}u^*)g_{\mu\nu}. \quad (6.2b)$$

Для внешней метрики Шварцшильда набор правильно нормированных базисных функций есть¹⁾

$$\begin{aligned} \vec{u}_{p l m}(x) &= (4\pi p)^{-1/2} r^{-1} \vec{R}_l(p|r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-ip t}, \\ \vec{u}_{p l m}(x) &= (4\pi p)^{-1/2} r^{-1} \vec{R}_l(p|r) Y_{lm}(\theta, \varphi) e^{-ip t}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где p положительно, Y_{lm} — обычные сферические гармоники, нормированные так, что

¹⁾ Мы следуем обозначениям де Витта [1], за исключением сферических гармоник.

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

$$\sum_{m=-l}^l |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 = \frac{2l+1}{4\pi},$$

а радиальные функции удовлетворяют уравнению

$$-\frac{d^2 R}{dr^{*2}} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right] R = p^2 R. \quad (6.4)$$

Поскольку уравнение (6.4) имеет вид уравнения Шредингера с положительным потенциалом, стремящимся к нулю и при $r^* \rightarrow \infty$ ($r \rightarrow \infty$), и при $r^* \rightarrow -\infty$ ($r \rightarrow 2M$), для *технических математических целей* мы можем опереться на понятия обычной квантовой теории рассеяния. Выберем in-базис, в котором функции имеют следующий асимптотический вид:

$$\tilde{R}_l(p|r) \sim \begin{cases} e^{ipr^*} + \tilde{A}_l(p)e^{-ipr^*}, & r \rightarrow 2M \\ B_l(p)e^{ipr^*}, & r \rightarrow \infty; \end{cases} \quad (6.5a)$$

$$\tilde{R}_l(p|r) \sim \begin{cases} B_l(p)e^{-ipr^*}, & r \rightarrow 2M, \\ e^{-ipr^*} + \tilde{A}_l(p)e^{ipr^*}, & r \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (6.5b)$$

η -вакуум строят, принимая эту интерпретацию теории рассеяния серьезно на *физическом* уровне. Пишут

$$\Phi(t, x) = \sum_j (a_j u_j + a_j^\dagger u_j^*) \quad (6.6)$$

и интерпретируют a_j^\dagger как операторы рождения для реальных частиц. Трудность с такой теорией заключается в том, что t и r^* не являются даже приближенно декартовыми координатами вблизи горизонта, так что отождествление решений с положительными p с волновыми функциями частиц не имеет физического обоснования в этой области. (Это пример конформной аномалии в смысле [2].)

Определение v -вакуума Израэля можно мотивировать следующим образом. Для того чтобы удовлетворительно трактовать локальную физику в точке пересечения горизонтов прошлого и будущего, \mathcal{H}^\pm , мы должны рассмотреть некоторую полную пространственно-временную окрестность этой точки и затем перенести ее в области, не покрываемые внешними координатами Шварцшильда. В аналитическом продолжении Крускала можно построить базисные функции,

которые на световом конусе этой точки имеют аналитические свойства положительно-частотных плоских волн. Они имеют вид

$$\begin{aligned} w_j &= (2 \operatorname{sh} 4\pi M p)^{-1/2} (e^{2\pi M p} u_j + e^{-2\pi M p} v_j^*), \\ \bar{w}_j &= (2 \operatorname{sh} 4\pi M p)^{-1/2} (e^{-2\pi M p} u_j^* + e^{2\pi M p} v_j), \end{aligned} \quad (6.7)$$

где v_j — функции, аналогичные u_j на втором листе многообразия (см. более подробно в работах [4–6]). После подстановки w_j и \bar{w}_j для u_j в общую формулу (6.2а) и некоторых преобразований получим (для точек в первоначальной области)

$$T_{\mu\nu}^{(\nu)} = \sum_j T_{\mu\nu}[w_j, w_j^*] + \sum_j T_{\mu\nu}[\bar{w}_j, \bar{w}_j^*] = \sum_j T_{\mu\nu}^{(\nu)}[u_j, u_j^*], \quad (6.8а)$$

где

$$T_{\mu\nu}^{(\nu)}[u_j, u_j^*] = \operatorname{cth}(4\pi M p) T_{\mu\nu}^{(\eta)}[u_j, u_j^*]. \quad (6.8б)$$

Здесь $T_{\mu\nu}^{(\eta)}[u_j, u_j^*]$ — выражение, введенное в предыдущем случае, получающееся из функций (6.3) по формуле (6.2б). (В уравнениях, таких, как (6.8а), сумма по j означает интеграл по p и суммы по l , m и направлениям стрелок.)

Определение ξ -вакуума Унру основывается на идее, что "положительные частоты" следует определять на начальных поверхностях, \mathcal{H}^- и \mathcal{J}^- . Поэтому построение (6.7) применимо только к волнам \vec{u} , выходящим с \mathcal{H}^- , а не к волнам \vec{u} , которые выходят с \mathcal{J}^- . Для тензора напряжений получается следующий результат:

$$T_{\mu\nu}^{(\xi)} = \int_0^\infty dp \sum_{l,m} \{ T_{\mu\nu}^{(\eta)}[\vec{u}, \vec{u}^*] + \operatorname{cth}(4\pi M p) T_{\mu\nu}^{(\eta)}[\vec{u}, \vec{u}^*] \}. \quad (6.9)$$

ξ -вакуум — это единственный вакуум из трех описанных, определение которого существенно зависит от применения in-базиса. out-базис дал бы состояние, в котором излучение сходится в черную дыру вместо того, чтобы выходить из нее. Этот обращенный во времени ξ -вакуум должен отличаться от состояния, получаемого перестановкой в определении $|\xi\rangle$ ролей входящих \vec{u}_j - и \vec{u}_j -функций, для которого тензор напряжений равен

$$\int_0^\infty dp \sum_{l,m} \{ \operatorname{cth}(4\pi M p) T_{\mu\nu}^{(\eta)}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu\nu}^{(\eta)}[\vec{u}, \vec{u}^*] \}. \quad (6.10)$$

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

Чтобы понять различие между этими состояниями, заметим, что температурное распределение частиц вне черной дыры состоит, грубо говоря, из трех типов частиц: тех, которые двигаются от дыры в радиальном направлении, тех, которые падают в дыру, и тех, которые вообще проходят мимо дыры, потому что они движутся тангенциально. ξ -вакуум содержит только первый тип, обращенный во времени ξ -вакуум содержит только второй тип, и состояние с тензором напряжений (6.10) содержит второй и третий типы частиц. ν -вакуум содержит все три типа частиц, а η -вакуум вовсе не содержит частиц на бесконечности.

Теперь мы сконцентрируем внимание на попарных разностях между средними значениями (6.2), (6.8) и (6.9):

$$T_{\mu}^{(\xi)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l, m} T_{\mu}^{\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*], \quad (6.11)$$

$$T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\xi)\nu} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l, m} T_{\mu}^{\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*], \quad (6.12)$$

$$T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu} = 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l, m} \{ T_{\mu}^{\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] + T_{\mu}^{\nu}[\vec{u}, \vec{u}^*] \}. \quad (6.13)$$

Мы опустили значок (η) у $T_{\mu}^{\nu}[u, u^*]$, так как теперь недоразумение невозможно. Эти интегралы сходятся. Поскольку для их определения не требуется ни регуляризации, ни перенормировки, их след равен нулю, как и у их подынтегральных выражений [см. (6.26)]. Это является причиной, почему T_{α}^{α} одно и то же для всех квантовых состояний.)

Давайте вычислим $T_{\mu}^{\nu}[u, u^*]$ и выполним суммирование по m . Подставим выражения (6.3) в уравнение (6.36) и получим после длинного, но простого вычисления

$$\sum_m T_{\mu}^{\nu}[u, u^*] = F_1 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + F_2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + F_3 \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

$$F_1 = \frac{2l+1}{32\pi^2 p r^2} \left\{ \frac{1}{r^2} [3l(l+1)+1] |R|^2 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{d^2 |R|^2}{dr^2} \right\}, \quad (6.15)$$

$$F_2 = \frac{2l+1}{96\pi^2 r^2} \left\{ \left[6p^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} - \frac{9l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r^2} \left(1 + \frac{3M}{r} \right) \right] |R|^2 - \right. \\ \left. - \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left(1 - \frac{3M}{r} \right) \frac{d|R|^2}{dr^*} + 2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \frac{d^2|R|^2}{dr^{*2}} \right\}, \quad (6.16)$$

$$F_3 = -i \frac{2l+1}{32\pi^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \left(R^* \frac{dR}{dr^*} - R \frac{dR^*}{dr^*} \right). \quad (6.17)$$

[R в этих выражениях те же, что в (6.4) и (6.5)]. Если, например, тензор $T_{\mu}^{(\xi)\nu} = T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ представлен как сумма $T_{\mu}^{(2)\nu} + T_{\mu}^{(3)\nu} + T_{\mu}^{(4)\nu}$ членов имеющих вид (2.8), то мы будем иметь

$$K_{\xi} - \eta = K_{\xi} = M^2 r^2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l=0}^{\infty} \vec{F}_3(p, l), \quad (6.18)$$

$$\Theta_{\xi} - \eta = 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{3} \vec{F}_1(p, l). \quad (6.19)$$

Однако мы не можем идентифицировать $Q_{\xi} - \eta$ с соответствующим интегралом от $F_2 + F_3$, так как член F_1 не обязательно имеет вид $T_{\mu}^{(3)\nu}$. Члены F_1 и F_2 в (6.14) не обязательно удовлетворяют уравнению $\nabla_{\nu} T_{\mu}^{\nu} = 0$ по отдельности, хотя их сумма этому соотношению удовлетворяет.

Легче всего вычислить F_3 . Вронскиан в (6.17) равен константе, так что его можно вычислить при всех r из асимптотического выражения (6.5). Получим

$$T_{r^*}^{(\xi)t} - T_{r^*}^{(\eta)t} = -[T_{r^*}^{(\nu)t} - T_{r^*}^{(\xi)t}] = T_{r^*}^{(\xi)t} = \\ = \frac{1}{8\pi^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} \int_0^{\infty} \frac{p dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) |B_e(p)|^2. \quad (6.20)$$

Пока эта формула точная. Де Витт [1, стр. 333] оценил этот интеграл в приближении геометрической оптики (см. ниже), получив

$$K_{\xi} = \frac{9}{40} (8^4 \pi^2)^{-1}. \quad (6.21)$$

Однако наиболее важным моментом является зависимость выражения (6.20) от r , которая справедлива везде от $2M$ до ∞ . Возвращаясь к (2.8) для случая $T_{\mu}^{(\xi)\nu}$, мы видим, что при $r \rightarrow 2M$ вклад $T_{\mu}^{(2)\nu}$ доминирует в $T_{t^*}^{(\xi)t}$ и $T_{r^*}^{(\xi)r}$. Таким образом, имеется поток отрицательной

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

энергии через горизонт, как в двумерной модели; он необходим для того, чтобы удовлетворить закону сохранения энергии и одновременно обеспечить физическую конечность тензора напряжений на горизонте.

Теперь мы опишем некоторое предварительное, простое приближение для других частей разности тензоров. Заменим радиальные функции в выражениях (6.15) и (6.16) их асимптотическими приближениями (6.5). Кроме того, сделаем приближение геометрической оптики: в каждой из одномерных задач рассеяния с фиксированным угловым моментом [уравнение (6.4)] волна считается полностью проходящей, если p^2 больше, чем максимальное значение эффективного потенциала:

$$V_l(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} \right], \quad (6.22)$$

но считается полностью отражающей, если p^2 меньше, чем это значение. Для каждого l $V_l(r)$ имеет пик в непосредственной близости к точке $r = 3M$ (см. фиг. 1) и, таким образом, максимальное значение $V_l(r)$ весьма близко к $\left(l + \frac{1}{2}\right)^2 / 27 M^2$. Итак, мы принимаем $|B_l(p)| = 1$ для

$$l + \frac{1}{2} < \sqrt{27} Mp, \quad (6.23)$$

и $|B_l(p)| = 0$ для $l + \frac{1}{2} > \sqrt{27} Mp$.

Теперь мы можем оценить $T_{\mu}^{(\xi)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ на бесконечности и $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\xi)\nu}$ около горизонта, так как в эти величины дают вклад только проходящие волны:

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi Mp} - 1} \sum_l \frac{1}{3} \vec{F}_1(r \approx \infty) \\ 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi Mp} - 1} \sum_l \frac{1}{3} \overleftarrow{F}_1(r \approx 2M) \end{aligned} \right\} \sim \frac{243}{260} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{r^4}, \quad (6.24a)$$

$$\left. \begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi Mp} - 1} \sum_l \vec{F}_2(r \approx \infty) \\ 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi Mp} - 1} \sum_l \overleftarrow{F}_2(r \approx 2M) \end{aligned} \right\} \sim \frac{9}{40} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^2 r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}. \quad (6.24b)$$

Здесь мы применили формулы

$$\sum_{l=0}^n \left(l + \frac{1}{2} \right) \approx \frac{1}{2} n^2,$$

$$\sum_{l=0}^n l(l+1) \left(l + \frac{1}{2} \right) \approx \sum_{l=0}^{\infty} \left(l + \frac{1}{2} \right)^3 \approx \frac{1}{4} n^4 \quad (6.25)$$

и интеграл Планка, который появился в уравнении (5.9). Уравнение (6.24а) дает главную асимптотику $\theta\theta$ -компоненты тензора, а уравнение (6.24б) — rr -компоненты. Поскольку мы верим, что $T_{\mu}^{(\nu)\nu}$ относительно мало около горизонта, а $T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ относительно мало при больших r , результаты (6.24) находятся в полном согласии со всеми утверждениями о $T_{\mu}^{(\xi)\nu}$, суммированными в средней строке табл. 1. Заметим также, что коэффициент в уравнении (6.24б) тот же, что и в уравнении (6.21) для потока как это и должно быть для того, чтобы воспроизвести уходящее безмассовое излучение на бесконечности и отрицательный поток через горизонт.

Для того чтобы вычислить $T_{\mu}^{(\xi)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ вблизи горизонта и $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\xi)\nu}$ на бесконечности, нам нужно иметь дело со спадающими и затем отражающимися волнами, так как интересующая нас точка r находится на той стороне потенциального пика, на которой соответствующие модовые решения падающие. Коэффициент отражения удовлетворяет соотношению

$$|\tilde{A}_l(p)|^2 = |\tilde{A}_l(p)|^2 = 1 - |B_l(p)|^2. \quad (6.26)$$

Для фиксированного l нам следует разделить область изменения энергии p на три интервала (см. фиг. 1). За исключением случая

$$p^2 > V_l(r) \approx \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(l + \frac{1}{2} \right)^2, \quad (6.27)$$

r находится в запрещенной классически области, где $R_l(p|r)$ экспоненциально убывает, поэтому в приближении геометрической оптики мы берем $R_l(p|r) = 0$. Если

$$V_l(r) < p^2 < \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 / 27 M^2$$

можно взять полностью отраженные волны ($|A| = 1$). Для больших p волна полностью проходящая, как и раньше ($|A| = 0$). Вклад от мод из третьего интервала такой же, как в предыдущем вычислении, в то вре-

мы как от второго интервала мы получаем одинаковые вклады и от падающей и от отраженной волн, плюс быстро осциллирующий интерференционный член, которым можно пренебречь при $r^* \rightarrow \pm\infty$. Таким образом, более удобно вычислять сумму данной величины и величины, вычисленной ранее, т.е. вычислять $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$, из которой $T_{\mu}^{(\xi)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ вблизи горизонта и $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\xi)\nu}$ на бесконечности могут быть получены вычитанием выражений (6.24). Требуемые суммирование и интегрирование (в приближении геометрической оптики) в уравнениях (6.23) – (6.27) теперь идентичны с теми, которые содержатся в уравнениях (6.24), за исключением множителя 2 и замены нижнего предела на p (эквивалентно, верхнего предела l при фиксированном p). Получаются следующие результаты:

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_l \frac{1}{3} (\vec{F}_1 + \vec{F}_1) &\sim \frac{1}{240} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}, \\
 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_l (\vec{F}_2 + \vec{F}_2) &\sim \frac{1}{240} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}.
 \end{aligned}$$

Однако эти выражения неправильные, потому что они не приводят к изотропному равновесному тензору напряжений (5.9). Грубое приближение геометрической оптики не адекватно в этом пункте, и необходимо вернуться к приближению ВКБ следующего более высокого порядка. То есть мы заменим каждую волну $e^{\pm i p r^*}$ в уравнении (6.5) на

$$\begin{aligned}
 [1 + V_l(r)/p^2]^{-1/4} e^{\pm i S_l(r^*)}, \\
 \frac{dS_l}{dr^*} = p[1 + V_l(r)/p^2]^{1/4}.
 \end{aligned}$$

Однако мы продолжаем применять приближение геометрической оптики для коэффициентов A и B . В этом приближении при $r \rightarrow \infty$ или $r \rightarrow 2M$ получим

$$\begin{aligned}
 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_l \frac{1}{3} (\vec{F}_1 + \vec{F}_1) &\sim \frac{1}{90} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2}, \quad (6.28a) \\
 2 \int_0^{\infty} \frac{dp}{e^{8\pi M p} - 1} \sum_l (\vec{F}_2 + \vec{F}_2) &\sim O\left(\frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}\right). \quad (6.28b)
 \end{aligned}$$

Это полностью согласуется с нашими предположениями относительно поведения $T_{\mu}^{(\nu)\nu}$ на бесконечности и $T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ вблизи горизонта (см.

разд. 5 и табл. 1). Расхождение с простейшим приближением можно приписать неравномерности предела

$$V_l(r) \rightarrow 0 \text{ при } r^* \rightarrow \pm\infty$$

для l и r вблизи границы области (6.27). Когда для интегралов по области (6.23) применяется приближение ВКБ, подынтегральное выражение можно просто разложить по степеням V_l ; и в низшем порядке этого разложения появится результат (6.24б).

Мы подозреваем, что

$$T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu} = \frac{1}{30} (8^4 \pi^2)^{-1} \frac{1}{M^4} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}. \quad (6.29)$$

в точности. Это [см. (5.12) и (5.13)] есть тензор напряжений классического газа в тепловом равновесии при температуре $kT = (8\pi M)^{-1}$ в статическом пространстве-времени с $g_{tt} = 1 - 2M/r$. Также это единственный *изотропный* тензор со всеми требуемыми свойствами.

Поскольку величина (6.28а) превосходит величины в уравнениях (6.24) и (6.28б) в асимптотических пределах, ведущие члены в $T_{\mu}^{(\xi)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ вблизи горизонта и в $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\xi)\nu}$ на бесконечности также даются выражением (6.28а).

Ясно, что приближения, примененные здесь, довольно грубые. В частности, они не точно передают вклад в интегралы от малых значений r , который важен ввиду экспоненциального убывания при больших r . Наше намерение здесь заключается только в том, чтобы выявить качественное асимптотическое поведение тензора напряжений. Однако мы хотим подчеркнуть, что величины (6.11)–(6.13) хорошо определены и конечны и могли бы быть вычислены точно для всех значений r при помощи достаточно изобретательной комбинации аналитической и численной техники. Мы надеемся, что это будет сделано достаточно скоро. Такое вычисление технически много проще, чем вычисление регуляризованного $\langle T_{\mu}^{\nu} \rangle$ для отдельного состояния. (В последнем случае низший порядок метода ВКБ представляется бесполезным, потому что произвол в расходящихся членах поглощает конечные члены, когда их пытаются выделить.)

Предвидя поэтому, что разности между средними значениями окажутся доступными ранее, чем сами средние значения, мы предлагаем

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

следующий метод построения разумного приближения для средних значений. Предположим, что вблизи $r = 2M$

$$T_{\theta}^{(\nu)\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} = A(r - 2M) + B(r - 2M)^2,$$

$$T_r^{(\nu)r} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} = E(r - 2M) + F(r - 2M)^2$$

и что при больших r

$$T_{\theta}^{(\eta)\theta} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} = Cr^{-6} + Dr^{-7},$$

$$T_r^{(\eta)r} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} = Gr^{-6} + Hr^{-7}.$$

Из уравнений (2.76) и (2.8) можно выразить E , F , G и H через A , B , C и D . Предположим также, что области справедливости этих приближений пересекаются в некоторой точке r_0 (вероятно, несколько меньшей, чем $3M$). Так как $T_{\mu}^{(\nu)\nu} - T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ предполагается известной, можно получить систему уравнений, определяющую A , B , C и D , требуя, чтобы два выражения для $T_{\theta}^{(\nu)\theta}$, $T_r^{(\nu)r}$ и их производные совпадали в r_0 . (Мы вычислили детерминант этой системы, и он оказался отличным от нуля.) Эта конструкция дает выражения для $T_{\mu}^{(\nu)\nu}$, $T_{\mu}^{(\eta)\nu}$ и (так как другие разности тензоров также предполагаются известными) $T_{\mu}^{(\xi)\nu}$. Было бы очень интересно выяснить, насколько точно $T_{\theta}^{(\xi)\theta}$, полученное таким образом, удовлетворяет условию согласованности (5.4).

7. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЯРКОСТИ И ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО ДАВЛЕНИЯ

В этом разделе мы сравним формулу (5.4) с вычисленными значениями потока Хокинга K_{ξ} для безмассовых свободных полей спинов 0, $\frac{1}{2}$ и 1. Мы получаем, что согласие с коэффициентами аномалии следов, выписанными ниже уравнения (5.1), и с асимптотическими свойствами $\Theta_{\xi}(r)$, установленными в разд. 5 и 6, требует, чтобы функция $\Theta_{\xi}(r)$ имела достаточно определенные общие свойства. Кроме того, этот результат зависит от спина естественным с точки зрения физики образом.

Пейдж [26] вычислил численно яркости нейтринного, фотонного и гравитонного излучения [см. (5.3)] шварцшильдовской черной дыры.

Он нашел, что яркость быстро убывает с ростом спина. Значения K_ξ , соответствующие его результатам, для поля нейтрино¹⁾ и электромагнитного поля приведены в табл. 2 вместе с аномальным членом из уравнения (5.4) и соответствующими значениями $G_\xi(\infty)$. (Мы не рассматриваем квантованное гравитационное поле, для которого тензор напряжений и аномалия зависят от калибровки.) Пейдж не получил значения L для нейтрального скалярного поля, так что мы будем применять оценку де Витта в приближении геометрической оптики (6.21). Последнее прямо связано (см. замечания в работе [26]) с сечением рассеяния классических частиц на твердой сфере радиуса $\sqrt{27}M$ (ср. обсуждение, предшествующее нашему уравнению (5.5)). Вычисления в приближении геометрической оптики для других полей отличаются только необходимыми множителями, учитывающими состояния спиральности и статистику (7/4 для нейтрино, 2 для фотонов); они включены в табл. 2.

Основное свойство этих результатов то, что коэффициент аномалии возрастает с ростом спина поля, а величина потока Хокинга убывает. Как следствие, хотя значение $G_\xi(\infty)$ может быть положительно для скалярного поля, оно отрицательно для нейтрино и тем более для фотонов. Возвращаясь к определению G_ξ (2.76), мы видим, что положительная $\Theta_\xi(r)$ дает положительный вклад в $G_\xi(\infty)$, если $r > 3M$, но отрицательный, если $2M < r < 3M$. Мы знаем [см. (5.5)], что $\Theta_\xi(r)$ в

Таблица 2

Аномалии следов, потоки Хокинга и предсказываемое интегральное тангенциальное давление, согласно уравнению (5.4)

	Скалярное поле	Нейтрино	Электромагнитное поле
Аномалия, $10^5 \pi^2 \times 3\beta/640$	7,81	23,4	93,7
Поток, $10^5 \pi^2 K_\xi = 10^5 \pi^2 \cdot M^2 L / 4\pi$	5,50		
Геометрическая оптика		9,62	11,00
Численные вычисления		6,42	2,65
$10^5 \pi^2 M^2 G_\xi(\infty)$ [см. (2.76)]			
Геометрическая оптика	+3,17	-4,16	-71,7
Численные вычисления		-10,6	-88,4

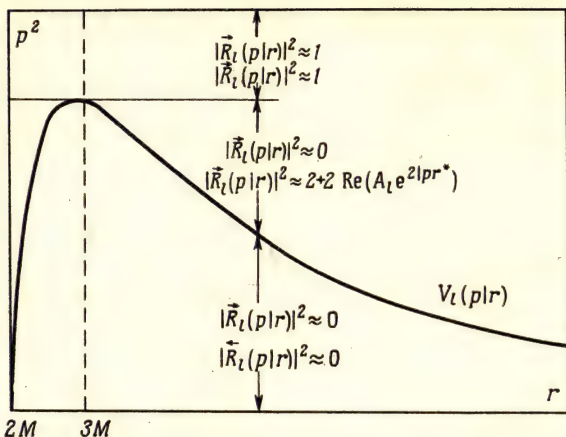
1) То есть для двух типов нейтрино, или ν_e и $\bar{\nu}_e$ или ν_μ и $\bar{\nu}_\mu$.

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

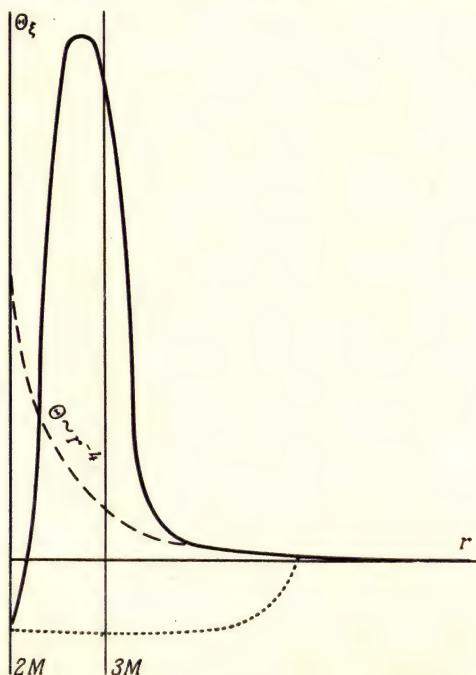
конце концов стремится к λr^{-4} , где λ — положительная постоянная; таким образом, заведомо имеется положительный вклад в $G_{\xi}(\infty)$ от больших r . Если везде $\Theta_{\xi}(r) = \lambda r^{-4}$, то $G_{\xi}(\infty)$ тождественно равно нулю. Однако [см. (6.12) и (6.24)] мы знаем, что Θ_{ξ} стремится к *отрицательной* посто~~ян~~ной при $r \rightarrow 2M$; эта модификация при малых r может дать в $G_{\xi}(\infty)$ только положительный вклад. Как в таком случае $G_{\xi}(\infty)$ может быть отрицательной? Существуют только две возможности: или Θ_{ξ} отрицательна на дающем существенный вклад интервале вне $r = 3M$, или Θ_{ξ} имеет высокий положительный пик внутри $r = 3M$ перед тем, как спуститься к отрицательным значениям при $r = 2M$ (фиг. 2).

Вторая альтернатива более правдоподобна. Во внешней области с малой кривизной, где квантовые эффекты рождения частиц локально пренебрежимы, не следует ожидать перехода между пучком обычного теплового излучения и высококоррелированным состоянием с отрицательным средним значением плотности энергии и давления. Но положительный выброс $T_{\theta}^{(5)\theta}(r)$ в области, непосредственно прилегающей к $r = 3M$ с внутренней стороны, — вот чего следует ожидать из известного поведения там орбит безмассовых частиц. Частице с большим угловым моментом требуется значительное время для того, чтобы преодолеть центробежный потенциальный барьер, если она вообще сумеет это сделать. Это является квантовомеханическим проявлением того факта, что многие классические орбиты становятся туго скрученными спиралями, когда они пересекают поверхность $r = 3M$ или подходят к ней. (См. [25], особенно фиг. 1; из орбит, рассмотренных там, к нашей задаче имеют отношение только классы III, IV и VI.) Поскольку такие частицы движутся в основном тангенциально, они дают большой вклад в T_{θ}^{θ} . Теперь, согласно [26], хокинговское излучение поля со спином мало в основном потому, что низшие значения орбитального углового момента обрезают спектр. Это значит, что спиральные орбиты (класса III и IV в работе [25], а также орбиты, расположенные внутри $r = 3M$) относительно более важны для высшего спина по сравнению с орбитами, которые более близки к радиальным (класс V). Этот эффект дает качественное объяснение явлению, продемонстрированному в табл. 2 и на фиг. 2.

Таким образом, предлагается следующая картина. Описание эффекта Хокинга на традиционном корпускулярном языке физически адекватно для всех траекторий, идущих внутрь центробежного барьера. При больших r тензор напряжений подобен тензору напряжений



Фиг. 1. Эффективный потенциал для парциальной волны с $l = 1$ и вызываемое им деление (r, p^2) -плоскости. Тип модовых функций показан вблизи точки $r > 3M$.



Фиг. 2. Качественное поведение $\Theta_\epsilon(r)$ для поля со спином. Пик приписывается частицам, которые медленно по спирали проходят через потенциальный барьер, возникающий из-за наличия углового момента, а также частицам, которые поднимаются по внутреннему склону и падают вниз. Альтернатива, указанная пунктирной линией, отвергается как нефизическая.

излучения от источника радиуса $\sqrt{27M}$ в плоском пространстве, а при $r \approx 3M$ он модифицируется чисто классическими геометрическими эффектами, которые более заметны для полей со спином. При r , близких к $2M$, квантовые поправки приводят к нарушению классических энергетических условий; в частности, на горизонте будущего должен быть чисто отрицательный направленный внутрь поток, для того чтобы удовлетворить закону сохранения энергии в статическом пространстве-времени (ср. [16]). (Эти выводы не зависят от отношения аномалий 1:3:12; нам нужно только предположение, что C^2 -аномалия не уменьшается с ростом спина так же быстро, как поток.)

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа проливает свет на два предмета — конформные аномалии и вопрос об энергии вакуума в пространстве-времени с горизонтами.

Что касается первого, мы собрали вместе в связную картину ранее не связанные и фрагментарные вычисления. Мы нашли доказательства согласованности различных методов регуляризации и получили значения коэффициентов аномалии для конформно взаимодействующего скалярного поля.

Во-вторых, мы применили эту информацию относительно следа перенормированного тензора напряжений для того, чтобы показать, как хоккингский эффект излучения черных дыр согласуется с существованием ковариантного сохраняющегося оператора тензора напряжений, среднее значение которого по физически несингулярному состоянию достаточно разумно ведет себя на горизонте. Формы тензоров напряжений для различных состояний в областях, где нет зависимости от времени, были довольно точно очерчены без детальных вычислений. (Это, конечно, было первоначальной целью исследования.) Было показано, что полученные качественные результаты физически приемлемы.

Мы также указали, в каком смысле можно было бы аппроксимировать вакуумное среднее значение тензора напряжений по обсуждавшимся состояниям. Этот метод обходит проблему вычисления расходимостей и позволяет оценить, применяя стандартную аппроксимационную технику, конечные физически интересные члены.

БЛАГОДАРНОСТИ

Мы благодарим Дэвиса, де Витта, Даукера, Даффа и Айшема за многообразную помощь и поддержку.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Некоторый тензор является конечным на горизонте в локальном физическом смысле, если и только если его компоненты конечны по отношению к координатам, которые там регуляры, таким, как светоподобные координаты Крускала

$$V = 4Me^{v/4M}, \quad U = -4Me^{-u/4M},$$

которые удовлетворяют

$$UV = -8Me^{r/2M} (r - 2M)$$

и поэтому

$$T_{VV} = 16M^2 V^{-2} T_{vv},$$

$$T_{UV} = -16M^2 (UV)^{-1} T_{uv} = 2Me^{-r/2M} (r - 2M)^{-1} T_{uv},$$

$$T_{UU} = 16M^2 U^{-2} T_{uu} = \frac{1}{4} e^{-r/M} V^2 (r - 2M)^{-2} T_{uu}.$$

Отсюда следует, что $T_{\mu\nu}$ физически конечен на горизонте будущего ($U = 0$), если и только если при $r \rightarrow 2M$

$$1) |T_{\theta}^{\theta}| < \infty,$$

$$2) |T_{vv}| = \frac{1}{4} |T_{tt} + T_{r^*r^*} + 2T_{tr^*}| < \infty,$$

$$3) (r - 2M)^{-1} |T_{uv}| = \frac{1}{4} |T_t^t + T_{r^*}^{r^*}| < \infty,$$

$$4) (r - 2M)^{-2} |T_{uu}| < \infty.$$

Тензоры (2.8а), (2.8б) и (2.8в) построены так, что они удовлетворяют этим условиям, если $\Theta(2M)$ конечно. Заметим, что T_{UU} порядка V^2 и поэтому [см. (1.2) и (1.3)] порядка $r - 2M$, если t фиксировано. Аналогично T_{VV} порядка $O(U^2)$, если $T_{\mu\nu}$ конечно на \mathcal{H}^- . Кроме того, так как $g_{uv} = -\frac{1}{2} (1 - 2M/r)$, мы находим с помощью (2.4) и (2.6), что

6. АНОМАЛИИ СЛЕДОВ И ЭФФЕКТ ХОКИНГА

$$T_{UV} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} g_{UV} = M r^{-1} e^{-r/2M} \Theta.$$

Отсюда следует, что если $T_{\mu\nu}$ конечен и на K^+ , и на K^- , и если $\Theta(r)$ порядка $r - 2M$, то все компоненты $T_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha} g_{\mu}^{\nu}$ исчезают в этом порядке при подходе к точке пересечения K^+ и K^- вдоль поверхности постоянного t . Это же верно для $T_{r*}^{r*} - \frac{1}{4} T_{\alpha}^{\alpha}$ и т.д. так же, как и для компонент Крускала, потому что бесконечное красное смещение отсутствует при подходе к горизонту с фиксированным t . В двумерной модели разд. 3 мы имеем $T_{UV} - \frac{1}{2} T_{\alpha}^{\alpha} g_{UV}$, и все другие утверждения этого приложения применимы без изменений.

*Замечание автора (С.А. Фуллинг) к русскому изданию*¹⁾. Значения коэффициентов аномалий следов для нейтрино и электромагнитного поля, приведенные в разд. 7 и табл. 2, как стало известно, ошибочные. Современное обсуждение аномалий следов безмассовых полей со спинами 0, $\frac{1}{2}$ и 1 см.: Duff M.J., Nucl. Phys., **B125**, 334 (1977); Dowker J.S., Critchley R., Phys. Rev., **D16**, 3390 (1977); Christensen S.M., Phys. Rev., **D17**, 946 (1978).

ЛИТЕРАТУРА²⁾

1. De Witt B.S., Phys. Rep., **19C**, 295 (1975). (Статья 2 этого сборника.)
2. Fulling S.A., Davies P.C.W., Proc. R. Soc. London, **A348**, 393 (1976).
3. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
4. Fulling S.A., Journ. Phys., **A (Math., Gen.)** **10**, 917 (1977).
5. Unruh W.G., Phys. Rev., **D14**, 870 (1976).
6. Israel W., Phys. Lett., **57A**, 107 (1976).
7. Gibbons G.W., Perry M.J., Proc. R. Soc. London, **A358**, 467 (1978). см. также Hartle J.B., Hawking S.W., Phys. Rev., **D13**, 2188 (1976; Gibbons G.W., Perry M.J., Phys. Rev. Lett., **36**, 985 (1976).
8. Blum B.S., Ph. D. Thesis, Brandeis University, 1973 (не опубликовано); Boulware D.G., Phys. Rev., **D11**, 1404 (1975).
9. Davies P.C.W., Proc. R. Soc. London, **A351**, 129 (1976).
10. Boulware D.G., Phys. Rev., **D13**, 2169 (1976).
11. Gibbons G.W., Hawking S.W., Phys. Rev., **D15**, 2738 (1977).
12. Fulling S.A., Phys. Rev., **D15**, 2411 (1977).

¹⁾ Получено редакцией 19 июня 1978 г. — Прим. ред.

²⁾ Литература, отмеченная звездочкой, добавлена переводчиком. — Прим. ред.

13. *Adler S.L.*, в сборнике *Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory*, 1970, Brandeis University Summer Institute in Theoretical Physics, Vol. 1, eds. S. Deser, M. Grisary, and H. Pendleton, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1970, pp. 1-164.
14. *Deser S., Duff M.J., Isham C.J.*, Nucl. Phys., **B111**, 45 (1976).
15. *Davies P.C.W., Fulling S.A., Christensen S.M., Bunch T.S.*, Ann. Phys. (N.Y.), **109**, 108 (1977).
16. *Davies P.C., Fulling S.A., Unruh W.G.*, Phys. Rev., **D13**, 2720 (1976).
17. *Davies P.C.W., Fulling S.A.*, Proc. R. Soc. London, **A354**, 59 (1977).
18. *Bunch T.S., Christensen S.M., Fulling S.A.*, в печати, приложение А.
19. *Christensen S.M.*, Phys. Rev., **D14**, 2490 (1976).
20. *Bunch T.S.*, Ph. D. thesis, King's College, London (готовится к печати)
21. *Dowker J.S., Critchley R.*, Phys. Rev., **D13**, 3224 (1976).
22. *Capper D.M., Duff M.I.*, Nuovo Cimento, **23A**, 173 (1974).
23. *Duff M.J.*, частное сообщение.
24. *Duff M.J.*, в сборнике *Quantum Gravity: An Oxford Symposium*, eds. C.J. Isham, R. Penrose and D.W. Sciama, Clarendon, Oxford, 1975, pp. 78-135.
25. *Ames W.L., Thorne K.S.*, Astrophys. Jour., **151**, 659 (1968).
26. *Page D.N.*, Phys. Rev., **D13**, 198 (1976).
- 27*. *Misner C., Thorne K., Wheeler J.*, Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973. (Имеется перевод: Ч. Мизнер, К. Торн, Дж. Уилер, Гравитация, "Мир", 1977.)
- 28*. *Байтман А.*, Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей, "Наука", 1968.
- 29*. *Brown L.S., Cassidy J.P.*, Phys. Rev., **D15**, 2810 (1977).

Статья 7

„Излучение“ и „поляризация вакуума“ вблизи черной дыры*

С.А. Фуллинг

Fulling S.A.** , Phys. Rev., D15, 2411 (1977)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Ранее опубликованные вычисления по двумерной модели показывают, что направленный наружу поток от коллапсирующего тела не обращается в бесконечность на горизонте. Противоположная интерпретация основывается на физически несущественном различии между "излучением" (или "частицами") и "статической поляризацией вакуума". В нашей интерпретации хокинговское тепловое излучение возникает в основном вне коллапсирующего тела.

Если задана классическая фоновая метрика тела, коллапсирующего с образованием черной дыры, квантовая теория поля предсказывает поток теплового излучения на бесконечности в поздние времена [1]. Выдвигаются различные предположения, и идет оживленная дискуссия относительно физической ситуации вблизи тела и вблизи горизонта. Возникли по меньшей мере три школы.

Согласно первой, излучение Хокинга должно возникать в коллапсирующей материи. Это согласуется с интуитивным ожиданием, что статическая геометрия вне тела не должна порождать частицы именно потому, что метрика зависит от времени в другой области. Кроме того, эту картину, как представляется по крайней мере на первый взгляд, поддерживают точные вычисления [2–4].

Возражение на эту первую точку зрения состоит в том, что она требует излучения квантов все большей и большей энергии (по изме-

* Работа финансирована Научным исследовательским советом, договор № В/BG/68807.

** Department of Mathematics, King's College, Strand, London WC2R 2LS, United Kingdom; адрес в настоящее время: Department of Mathematics, Texas A&M University, College Station, Texas 77843.

© 1977 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

рениям, скажем, в системе отсчета, связанной с поверхностью тела) для того чтобы компенсировать красное смещение, испытываемое излучением по пути к бесконечности. Другими словами, постоянный поток, видимый в течение бесконечного времени асимптотическим наблюдателем, может быть сведен к конечному интервалу истинного времени вдоль поверхности, окружающей тело и пересекающей горизонт на конечном аффинном расстоянии от тела; следовательно, поток энергии и плотность должны обращаться в бесконечность при приближении к горизонту вдоль такой поверхности. Но в локальной геометрии на горизонте нет ничего особенного; горизонт выделяется только его глобальным соотношением с сингулярностью в будущем. Поэтому неправдоподобно, что локальная физика становится там сингулярной.

Выдвигалось соображение, что сингулярность на горизонте (если она там есть) может быть следствием неадекватности физики модели; если принять во внимание реакцию рожденных частиц на метрику с помощью уравнений гравитационного поля, то бесконечность (а возможно, и сам горизонт) может исчезнуть. Это замечание, однако, не разрешало бы очевидный математический парадокс сингулярного поведения в системе, описываемой гладким дифференциальным уравнением (уравнение для поля материи с коэффициентами, определяемыми метрикой) и гладким начальным условием (пространство, первоначально не заполненное материей).

Те, кто отвергают только что описанную картину, делятся на две группы. По мнению Хокинга [1,5], точное описание физики в малой области с высокой кривизной невозможно, потому что волновые частоты хорошо определены только в приблизительно плоских областях пространства-времени некоторой конечной протяженности. В лучшем случае можно сделать приближенные, операционные, сильно зависящие от наблюдателя утверждения. В этом контексте доказывалось, что наблюдатель, пересекающий горизонт вблизи тела, мог бы "видеть" очень малое излучение (ср. [12] и [13]).

Другая точка зрения заключается в том, что хотя в областях с сильной кривизной нельзя определить *частицы*, еще должно быть возможно дать там детальную, не зависящую от наблюдателя физическую интерпретацию квантовой теории поля. В частности, такие локальные функции поля, как тензор энергии-импульса $T_{\mu\nu}(x)$, должны иметь смысл как наблюдаемые квантовой теории.

7. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

Последний подход был успешно проведен для двумерных моделей скалярного поля [6, 7] (см. также [11], разд. I и [4]), и ведется работа в четырех измерениях. Основная проблема состоит в том, чтобы выделить конечный, физически осмысленный тензор энергии-импульса (или другую наблюдаемую) из расходящегося формального выражения для этой величины. В двух измерениях это может быть сделано относительно однозначно, и теория дает вакуумное среднее значение, $\langle T_{\mu\nu}(x) \rangle$, удовлетворяющее физическим требованиям. В частности, для модели коллапсирующей черной дыры [6] $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ имеет следующие свойства: 1) воспроизводится поток Хокинга на бесконечности в поздние времена; 2) тензор ковариантно сохраняется, $\langle \nabla_\mu T^\mu_\nu \rangle = 0$; 3) тензор является конечной, гладкой функцией пространства и времени вблизи горизонта.

Здесь мы хотим тщательно проанализировать третье свойство, так как результаты вычислений [6, 4] и [3] могут быть неправильно истолкованы, как поддерживающие мнение, что бесконечный поток излучения испускается коллапсирующим телом.

Основной вывод статьи [6] (см. также [13]) состоит в том, что напряжение вакуума вне двумерного коллапсирующего тела "массы" M в поздние времена есть

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = T_{\mu\nu}^S + (24\pi)^{-1} w_\mu w_\nu, \quad (1)$$

где $T_{\mu\nu}^S$ равен значению, которое $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ могло бы принимать вне статического тела массы M (и поэтому радиуса, большего чем $2M$), а w_μ — направленный наружу световой вектор, удовлетворяющий условиям

$$\nabla_\mu w^\mu = 0, \quad w^\mu \nabla_\mu w_\nu = 0. \quad (2)$$

Каждый член уравнения (1) в отдельности удовлетворяет ковариантному закону сохранения $\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0$.

$T_{\mu\nu}^S$ выражен в обычных шварцшильдовских координатах (t, r) в уравнении (5) в [6] (см. также уравнение (8) настоящей статьи). Он является функцией только от r с $T^S_{tr} = 0$. *За исключением общего отрицательного знака*, он мог бы быть тензором напряжений для облака классической материи в ее системе покоя. В шварцшильдовских световых координатах

$$\begin{aligned} u &= t - r^*, & v &= t + r^*, \\ r^* &= r + 2M \ln(r/2M - 1) \end{aligned} \quad (3)$$

имеем

$$w_v = 0, \quad w_u = (32 M^2)^{-1/2}; \quad (4)$$

главное в законах сохранения (2) то, что w_u не зависит от v . Таким образом, член $T_{\mu\nu}^R = (24\pi)^{-1} w_\mu w_\nu$ классически может представлять испускаемое телом безмассовое излучение.

Имеется попытка интерпретировать $T_{\mu\nu}^R$ как тензор энергии-импульса хокинговского излучения, создаваемого при коллапсе, а $T_{\mu\nu}^S$ как "поляризацию" вакуума, ассоциируемую со статической кривизной пространства, которая могла бы существовать даже, если бы тело никогда не коллапсировало, но поддерживалось бы при постоянном радиусе (обязательно меньшем, чем координата r точки, где вычисляется $\langle T_{\mu\nu} \rangle$). Мы постараемся доказать, что такой язык *не* адекватен при описании локальной физики модели, особенно вблизи горизонта.

Во-первых, заметим, что если бы тело первоначально имело большой радиус (сравнимый с $2M$) и низкую плотность, тогда при ранних временах $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ было бы относительно мало везде в пространстве. Точки с координатами $r \simeq 2M$ находились бы тогда внутри тела, где шварцшильдская форма $T_{\mu\nu}^S$ не применима. С этой точки зрения большая "поляризация вакуума" вблизи черной дыры в поздние времена "вызывается" коллапсом тела точно в такой же степени, как и поток Хокинга.

Во-вторых, каждое слагаемое в (1) обращается в бесконечность, когда точка x стремится к горизонту, *но сумма остается конечной*. (Эти утверждения относятся к компонентам тензоров по отношению к соответствующей локальной системе отсчета.) Один из способов увидеть это — произвести преобразование в координатную систему Крускала; находим [13], что

$$\begin{aligned} \langle T_{UU} \rangle &= (768\pi M^2)^{-1} V^2 r^{-2} e^{-r/M} \left(\frac{3M^2}{r^2} + \frac{M}{r} + \frac{1}{4} \right), \\ \langle T_{VV} \rangle &= (6\pi)^{-1} M^2 V^{-2} \left(\frac{3M^2}{2r^4} - \frac{M}{r^3} \right), \\ \langle T_{UV} \rangle &= -(12\pi)^{-1} M^2 r^{-4} e^{-r/2M}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2Mr^{-1} e^{-r/2M} dU dV, \\ UV &= 16M^2 (r/2M - 1) e^{r/2M}. \end{aligned} \quad (6)$$

7. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОЛЯРИЗАЦИЯ ВАКУУМА

Горизонт (будущего) — это линия $U = 0$. (Хотя представляется, что $\langle T_{VV} \rangle$ терпит разрыв на горизонте прошлого, $V = 0$, формула там неприменима, так как эта линия была бы внутри тела.)

Мы приведем более подробно альтернативный, более поучительный анализ членов в $\langle T_{\mu\nu} \rangle$. Рассмотрим компоненты этих тензоров относительно ортонормированной тетрады, соответствующей шварцшильдовской системе координат. Пусть

$$z = r - 2M. \quad (7)$$

Мы будем игнорировать в этом обсуждении компоненту следа, $\langle T_{uv} \rangle = T_{uv}^S \sim R g_{uv}$, так как ее тензорные трансформационные свойства тривиальны и ясно, что она хорошо себя ведет на горизонте. Также, для краткости, мы опустим общий множитель $(192\pi)^{-1}$. Применяя знак "шляпки", чтобы помнить обо всех этих соглашениях, мы получим из соотношений

$$T_{uu}^S = T_{vv}^S = (24\pi)^{-1} \left(\frac{3M^2}{2r^4} - \frac{M}{r^3} \right) \quad (8)$$

(приведенных в [6]), что бесследовая часть статической поляризации вакуума есть

$$\hat{T}_{tb}^S = f(z) < 0, \quad \hat{T}_{tr}^S = 0, \quad (9)$$

где $f(z) \simeq -\frac{1}{4}Mz^{-3}$ при $z \rightarrow \infty$ и

$$f(z) \simeq -\frac{1}{Mz} - \frac{1}{2M^2} + \frac{3z}{2M^3} + \dots \text{ при } z \rightarrow 0. \quad (10)$$

Тензор "излучения" есть

$$\hat{T}_{tt}^R = -\hat{T}_{tr}^R = \frac{1}{2Mz} + \frac{1}{4M^2}, \quad (11)$$

и поэтому он доминирует при больших z . Сумма вкладов (9) и (11) резко возрастает на горизонте ($z = 0$), но только потому, что шварцшильдовская система координат становится там сингулярной. Вектор Киллинга, определяющий ось времени нашей тетрады, становится на горизонте светоподобным. Если наблюдатель вблизи горизонта движется со скоростью, близкой к скорости света, он естественно, видит любую материю, имеющуюся там, с исключительно сильным смещением. Для того чтобы получить разумный результат, мы

должны применить к тетраде зависящее от z локальное лоренцево преобразование. Такое преобразование легче всего выписывается для компонент в световых направлениях. Мы положим

$$\hat{T}_{u' u'} = (Az)^{-1} \hat{T}_{uu}, \quad \hat{T}_{v' v'} = Az \hat{T}_{vv}, \quad (12)$$

где штрих указывает, что базисные векторы не параллельны первоначальным осям координат. В этой новой системе отсчета мы имеем

$$\left. \begin{array}{l} \hat{T}_{t't'}^S \\ -\hat{T}_{t'r'}^S \end{array} \right\} = -\frac{1}{2MAz^2} - \frac{1}{4M^2Az} + \frac{3}{4M^3A} \mp \frac{A}{2M} + O(z), \quad (13)$$

$$\hat{T}_{t'r'}^R = -\hat{T}_{t'r'}^R = \frac{1}{2MAz^2} + \frac{1}{4M^2Az}. \quad (14)$$

Сингулярности обоих членов при $z = 0$ стали еще сильнее, чем раньше; можно сказать, что наблюдатель видит предполагаемое уходящее излучение с синим смещением, потому что он погружен в него и, подобным образом, что он теперь движется относительно поляризации вакуума. Однако эти сингулярности вычитаются в уравнении (1):

$$\left. \begin{array}{l} \langle \hat{T}_{t't'}^S \rangle \\ -\langle \hat{T}_{t'r'}^S \rangle \end{array} \right\} = \frac{3}{4M^3A} \mp \frac{A}{2M} + O(z). \quad (15)$$

Поэтому полный тензор напряжений хорошо себя ведет на горизонте, как ожидалось из гладкости динамической проблемы, которая должна его определять. Это не отрицает того, что тензор (15) имеет необычные свойства с классической точки зрения. Так как $|\langle T_{t't'}^S \rangle| < |\langle T_{t'r'}^S \rangle|$, то не существует "системы покоя", где $\langle T_{t'r'}^S \rangle = 0$, вместо этого можно выбрать A , так что $\langle T_{t'r'}^S \rangle = 0$. Следует иметь в виду, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ не представляет реального потока материи, но скорее дает вероятностную информацию относительно результатов некоторых идеализированных экспериментов.

Можно написать

$$\langle \hat{T}_{\mu\nu} \rangle = \hat{T}_{\mu\nu}^{\text{out}} + \hat{T}_{\mu\nu}^{\text{in}} + O(z), \quad (16)$$

где

$$\hat{T}_{t't'}^{\text{out}} = -\hat{T}_{t'r'}^{\text{out}} > 0 \quad (\hat{T}_{uu}^{\text{out}} > 0, \hat{T}_{vv}^{\text{out}} = 0) \quad (17)$$

и

$$\hat{T}_{t't'}^{\text{in}} = \hat{T}_{t'r'}^{\text{in}} < 0 \quad (\hat{T}_{uu}^{\text{in}} = 0, \hat{T}_{vv}^{\text{in}} = 0). \quad (18)$$

Эти части наглядно можно соответственно рассматривать как направленный наружу пучок обычного излучения и направленный внутрь пучок излучения с отрицательной энергией. Направленный наружу пучок имеет конечную интенсивность, но на бесконечности (т.е. позднее на \mathcal{J}^+) он становится хокинговским излучением. Направленный внутрь пучок, проинтегрированный по горизонту вне тела, дает поток отрицательной энергии в черную дыру. В случае, когда тело первоначально так разрежено, что $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ можно пренебречь для всех практических целей при ранних временах, можно сказать, что эти два пучка "порождены" позднее в области вне тела. Можно даже говорить о рождении частиц парами¹⁾. Хотя эти выражения только метафорические, они имеют больше смысла, чем альтернативное описание, при котором все хокинговское излучение приписывается телу. Говоря более прозаически, уравнение (16) является более полезным разложением, чем уравнение (1), если z мало.

Рассмотрение предела при поздних временах для получения уравнения (1) приводит к восстановлению опущенных членов, которые могут дать конечную ненулевую добавку к $\hat{T}_{\mu\nu}$. Этот член зависит от деталей коллапса и может быть удовлетворительно интерпретирован как излучение, производимое прямо изменяющейся во времени геометрией в коллапсирующем теле.

Третий аргумент заключается в том, что тенденция рассматривать разложение (1) как имеющее особое физическое значение, наиболее вероятно, основана на неправильном представлении, что $T_{\mu\nu}^S$ внутренне связан с локальной кривизной шварцшильдовского пространства-времени, тогда как другой член представляет "реальную материю", которая движется на этом фоне. Наоборот, бесследовая часть $T_{\mu\nu}^S$ не является локальной функцией самой геометрии, но зависит от выбранного квантового состояния. Тензор, данный в (8)–(10), неразрывно связан с применением шварцшильдовского времениподобного вектора Киллинга для определения "положительных частот" и поэтому вакуумного состояния. В случае статического тела (с геометрией Шварцшильда только во внешней области) эта процедура приводит к гладкому начальному условию при задании состояния квантового поля. Однако, когда существует горизонт прошлого (как в полном

¹⁾ Это представление имеет до некоторой степени строгий математический эквивалент в корреляции излучения в модах, определенных на \mathcal{J}^+ , и в модах, определенных на горизонте [8].

многообразии Шварцшильда—Крускала), это начальное условие [9] становится сингулярным, потому что на горизонте вектор Киллинга является светоподобным. Если мы обозначим это вакуумное состояние через Ψ , то $\langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle$ равно $T_{\mu\nu}^S$ в двумерной модели. Такое состояние представляет физически неправдоподобную начальную конфигурацию полевой системы. Оно в точности аналогично состоянию, сконструированному в части плоского пространства-времени с генератором преобразования Лоренца в качестве основного времениподобного вектора Киллинга [10]. Естественное геометрическое определение "вакуумных" начальных условий на горизонте прошлого, не зависящее от системы координат, которая там сингулярна, воспроизводит обычный вакуум в плоском пространстве, тогда как в пространстве Крускала оно дает состояние, которое несингулярно вдали от горизонта прошлого и содержит поток Хокинга на световой бесконечности будущего ([11], разд. II). Возвращаясь к случаю коллапсирующего тела, видим, что первоначальный вакуум—несингулярное состояние везде, но что если вычесть из $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ среднее значение $T_{\mu\nu}$ по сингулярному состоянию Ψ , как, очевидно, имелось в виду в [3], тогда остаток имеет на горизонте сингулярность, которая и представляет собой бесконечный, якобы, поток частиц или излучения. Если не приписывать никакого фундаментального физического значения $\langle \Psi | T_{\mu\nu} | \Psi \rangle$, то это вычитание бессмысленно.

Пока $T_{\mu\nu}$ является единственной рассматриваемой наблюдаемой, нет способа различить два члена в (1) в том, что относится к локальной физике. По-видимому, однако, существуют эксперименты, результаты которых не описываются одним только оператором тензора энергии-импульса. В частности, если можно придать некоторый независимый смысл понятию "частиц" в областях сильной кривизны: например, при изучении взаимодействия поля с модельными детекторами [12] (и [11], разд. III), то вопрос о возникновении частиц, составляющих поток Хокинга, мог бы быть пересмотрен. Однако Унру привел доводы, что такие частицы не могут появляться все из тела, но должны большей частью производиться вне его вблизи горизонта [13]. Его аргументы полностью независимы от анзатца, примененного в [6] для того, чтобы определить перенормированный тензор напряжений (1).

Эта статья многим обязана обсуждениям и переписке с Унру. Автор благодарен также Дэвису и де Витту за стимулирующие обсуждения. Я также благодарен за предоставленную возможность развивать эти идеи перед отзывчивыми слушателями на различных семинарах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hawking S.W.*, Commun. Math. Phys., **43**, 1999 (1975).
2. *Gerlach U.H.*, в сборнике Proc. of the Marcel Grossmann Conference, Trieste, 1975; Phys. Rev., **D14**, 1479 (1976).
3. *Boulware D.G.*, Phys. Rev., **D13**, 2169 (1976).
4. *Davies P.C.W.*, Proc. R. Soc. London, **A351**, 129 (1976).
5. *Gibbons G.W.*, *Hawking S.W.*, Phys. Rev., **D15**, 2738 (1977).
6. *Davies P.C.W.*, *Fulling S.A.*, *Unruh W.G.*, Phys. Rev., **D13**, 2720 (1976).
7. *Fulling S.A.*, *Davies P.C.W.*, Proc. R. Soc. London, **A348**, 393 (1976);
Davies P.C.W., *Fulling S.A.*, Proc. R. Soc. London, **A354**, 59 (1977);
Bunch T.S., Ph. D. thesis, King's College London, готовится к печати.
8. *Wald R.M.*, Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975); *Parker L.*, Phys. Rev., **D12**, 1519 (1975); *Hawking S.W.*, Phys. Rev., **D14**, 2460 (1976).
9. *Boulware D.G.*, Phys. Rev., **D11**, 1404 (1975).
10. *Fulling S.A.*, Phys. Rev., **D7**, 2850 (1973).
11. *Unruh W.G.*, Phys. Rev., **D14**, 870 (1976).
12. *Unruh W.G.*, в сборнике Proc. of the Marcel Grossmann Conference Trieste, 1975.
13. *Unruh W.G.*, Phys. Rev., **D15**, 365 (1977).

Статья 8

Интегралы действия и статистические суммы в квантовой гравитации

Г. В. Фиббонс, С. В. Хокинг

Gibbons G.W.*, Hawking S.W.**, Phys. Rev., D15, 2752 (1977)

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Можно вычислить действие для гравитационного поля на сечении комплексифицированного пространства-времени, которое обходит сингулярности. Таким образом мы получили конечные, чисто мнимые значения для действий решений Керра—Ньюмена и пространства де Ситтера. Одна интерпретация этих значений состоит в том, что они дают вероятности нахождения таких метрик в вакуумном состоянии. Другая интерпретация заключается в том, что они дают вклад таких метрик в статистическую сумму для большого канонического ансамбля при некоторой температуре, угловом моменте и заряде. Мы применяем такой подход для вычисления энтропии этих метрик и находим, что она всегда равна одной четвертой площади горизонта событий в фундаментальных единицах. Это согласуется с более ранними выводами при помощи полностью отличных методов. В случае стационарной системы, такой, как звезда без горизонта событий, гравитационное поле не имеет энтропии.

1. ВВЕДЕНИЕ

В подходе к квантованию гравитации с помощью континуального интегрирования рассматривают выражения вида

$$Z = \int d[g] d[\varphi] \exp\{iI[g, \varphi]\}, \quad (1.1)$$

где $d[g]$ — мера на пространстве метрик g , $d[\varphi]$ — мера на простран-

* Настоящий адрес: Max-Planck-Institute für Physik und Astrophysik, 8 München 40, Postfach 401212, BRD. Telephone: 327001.

** Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, England.

© 1977 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1978.

8. ИНТЕГРАЛЫ ДЕЙСТВИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

стве полей материи ϕ , а $I[g, \phi]$ — действие. В этот интеграл должны включаться не только метрики, которые можно непрерывно деформировать в метрику плоского пространства, но также гомотопически неэквивалентные метрики, такие, как метрики черных дыр; образование и испарение черных макроскопических дыр приводит к таким эффектам, как несохранение барионного заряда и производство энтропии [1–4]. Поэтому можно было бы ожидать возникновения подобного явления и на уровне элементарных частиц. Однако вычисление действия I для метрики черной дыры является проблемой из-за пространственно-временных сингулярностей, которые она необходимо содержит [5–7]. В этой статье мы покажем, как можно преодолеть эту трудность, комплексифицируя метрику и вычисляя действие на вещественном четырехмерном сечении (фактически контуре), которое обходит сингулярности. В разд. 2 мы применяем эту процедуру для того, чтобы вычислить действие для некоторых стационарных точных решений уравнений Эйнштейна. Для черной дыры с массой M , угловым моментом J и зарядом Q получаем

$$I = i\pi\kappa^{-1}(M - Q\Phi), \quad (1.2)$$

где

$$\kappa = (r_+ - r_-) 2^{-1}(r_+^2 + J^2 M^{-2})^{-1},$$

$$\Phi = Qr_+(r_+^2 + J^2 M^{-2})^{-1},$$

$$r_{\pm} = M \pm (M^2 - J^2 M^{-2} - Q^2)^{1/2}$$

в единицах, в которых $G = c = \hbar = k = 1$.

Одна интерпретация этого результата состоит в том, что он дает вероятность, в соответствующем смысле, возникновения в вакуумном состоянии черной дыры с такими параметрами. Этот аспект будет обсуждаться далее в другой статье. Другая интерпретация, которая будет обсуждаться в разд. 3 этой статьи, заключается в том, что действие представляет собой вклад гравитационного поля в логарифм статистической суммы для систем при некоторой температуре и угловой скорости. Из статистической суммы можно вычислить энтропию стандартными термодинамическими методами. Оказывается, что эта энтропия равна нулю для стационарных гравитационных полей, таких, как поля звезд, которые не содержат горизонтов событий. Однако, и для черных дыр и для пространства де Ситтера [8] оказывается, что энтропия равна $1/4$ площади поверхности горизонта событий. Это согласуется с результатами, полученными полностью отличными методами [1, 4, 8].

2 ДЕЙСТВИЕ

Действие для гравитационного поля обычно берется в виде

$$(16\pi)^{-1} \int R(-g)^{1/2} d^4x.$$

Однако скалярная кривизна R содержит члены, которые линейны по вторым производным метрики. Для того чтобы получить действие, которое линейно по первым производным метрики, как это требуется в методе континуального интегрирования, вторые производные следует уничтожить при помощи интегрирования по частям. Действие для метрики g по области Y с границей ∂Y имеет вид

$$I = (16\pi)^{-1} \int_Y R(-g)^{1/2} d^4x + \int_{\partial Y} B(-h)^{1/2} d^3x. \quad (2.1)$$

Поверхностный член B должен быть выбран так, чтобы для метрик g , которые удовлетворяют уравнениям Эйнштейна, действие I являлось экстремальным при вариациях метрики, таких, которые исчезают на границе ∂Y , но могут иметь ненулевую нормальную производную. Это будет выполняться, если $B = (8\pi)^{-1}K + C$, где K — след второй фундаментальной формы границы ∂Y в метрике g , а C — член, который зависит только от индуцированной на ∂Y метрики h . Член C приводит к слагаемому в действии, которое не зависит от метрики g . Оно может быть включено в нормировку меры на пространстве всех метрик. Однако в случае асимптотически плоских метрик, когда граница ∂Y может быть взята в виде произведения оси времени на двумерную сферу большого радиуса, естественно выбрать C так, чтобы $I = 0$ для метрики плоского пространства-времени η . Тогда $B = (8\pi)^{-1} [K]$, где $[K]$ — разность следов второй фундаментальной формы ∂Y в метрике g и в метрике η .

Мы проиллюстрируем процедуру вычисления действия по несингулярному сечению комплексифицированного пространства-времени на примере решения Шварцшильда. Оно обычно дается в виде

$$ds^2 = -(1 - 2Mr^{-1})dt^2 + (1 - 2Mr^{-1})^{-1}dr^2 + r^2d\Omega^2. \quad (2.2)$$

Это выражение имеет сингулярности при $r = 0$ и при $r = 2M$. Как теперь хорошо известно, сингулярность при $r = 2M$ может быть удалена преобразованием к координатам Крускала, в которых метрика имеет вид

8. ИНТЕГРАЛЫ ДЕЙСТВИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

$$ds^2 = 32M^3 r^{-1} \exp[-r(2M)^{-1}] (-dz^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3)$$

где

$$-z^2 + y^2 = [r(2M)^{-1} - 1] \exp[r(2M)^{-1}], \quad (2.4)$$

$$(y + z)(y - z)^{-1} \exp[t(2M)^{-1}]. \quad (2.5)$$

Сингулярность при $r = 0$ находится теперь на поверхности $x^2 - y^2 = 1$. Она является сингулярностью кривизны и не может быть удалена заменой координат. Однако ее можно обойти, введя новую координату $\zeta = iz$. Метрика теперь принимает положительно-определенную или евклидову форму

$$ds^2 = 32M^3 r^{-1} \exp[-r(2M)^{-1}] (d\zeta^2 + dy^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.6)$$

где r теперь определяется из соотношения

$$\zeta^2 + y^2 = [r(2M)^{-1} - 1] \exp[r(2M)^{-1}]. \quad (2.7)$$

На сечении, на котором ζ и y вещественны (евклидово сечение), r будет вещественно и больше или равно $2M$. Введем мнимое время $\tau = it$. Из уравнения (2.5) следует, что τ периодически с периодом $8\pi M$. На евклидовом сечении τ имеет характер угловой координаты относительно "оси" $r = 2M$. Так как евклидово сечение несингулярно, мы можем вычислить действие (2.1) по области Y по ограничивающей ее поверхности $r = r_0$. Граница ∂Y имеет топологию $S^1 \times S^2$ и поэтому компактна.

Скалярная кривизна R равна нулю, поэтому действие дается поверхностным членом

$$I = (8\pi)^{-1} \int [K] d\Sigma. \quad (2.8)$$

Но

$$\int K d\Sigma = \frac{\partial}{\partial n} \int d\Sigma, \quad (2.9)$$

где $(\partial/\partial n) \int d\Sigma$ — производная площади $\int d\Sigma$ поверхности ∂Y , когда каждая точка ∂Y удаляется на равное расстояние вдоль направленной наружу единичной нормали n . Таким образом, для решения Шварцшильда

$$\begin{aligned} \int K d\Sigma &= -32\pi^2 M (1 - 2Mr^{-1})^{1/2} \frac{d}{dr} [ir^2(1 - 2Mr^{-1})^{1/2}] = \\ &= -32\pi^2 iM(2r - 3M). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Множитель $-i$ возникает из $(-h)^{1/2}$ в поверхностном элементе $d\Sigma$. Для плоского пространства $K = 2r^{-1}$. Таким образом,

$$\int K d\Sigma = -32\pi^2 iM(1 - 2Mr^{-1})^{1/2} 2r. \quad (2.11)$$

Поэтому

$$I = (8\pi)^{-1} \int [K] d\Sigma = 4\pi iM^2 + O(M^2 r_0^{-1}) = \pi iM\kappa^{-1} + O(M^2 r_0^{-1}), \quad (2.12)$$

где $\kappa = (4M)^{-1}$ — поверхностная гравитация решения Шварцшильда.

Для решения Рейсснера–Нордстрема процедура аналогична, за исключением того, что теперь нужно добавить действие для электромагнитного поля F_{ab} . Оно равно

$$-(16\pi)^{-1} \int F_{ab} F^{ab} (-g)^{1/2} d^4x. \quad (2.13)$$

Для решения уравнений Максвелла F^{ab} ; $b = 0$, так что подынтегральное выражение в (2.13) может быть записано как дивергенция

$$F_{ab} F_{cd} g^{ac} g^{bd} = (2F^{ab} A_a)_{;b}. \quad (2.14)$$

Таким образом, действие равно

$$-(8\pi)^{-1} \int F^{ab} A_a d\Sigma_b. \quad (2.15)$$

Электромагнитный вектор-потенциал A_a для решения Рейсснера–Нордстрема обычно выбирается в виде

$$A_a = Qr^{-1}t_{;a}. \quad (2.16)$$

Однако это выражение сингулярно на горизонте, так как t там не определено. Для того чтобы получить регулярный потенциал, нужно сделать калибровочное преобразование

$$A'_a = (Qr^{-1} - \Phi)t_{;a}, \quad (2.17)$$

где $\Phi = Q(r_+)^{-1}$ — потенциал горизонта черной дыры. Действие для взаимодействующих гравитационного и электромагнитного полей равно

$$I = i\pi\kappa^{-1}(M - Q\Phi). \quad (2.18)$$

Мы вычислили действие на сечении комплексифицированного пространства-времени, на котором индуцированная метрика вещественна и положительно-определена. Однако, поскольку R , F_{ab} и K — голоморфные функции в комплексифицированном пространстве-времени, за исключением сингулярностей, интеграл действия — это фактически контурный интеграл, и он будет иметь то же значение на любом сечении комплексифицированного пространства-времени, которое гомологично евклидову сечению, даже если индуцированная метрика на этом сечении может

8. ИНТЕГРАЛЫ ДЕЙСТВИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

быть комплексной. Это позволяет нам обобщить процедуру на другие пространства-времена, которые не обязательно имеют вещественное евклидово сечение. Особенно важный пример такой метрики — это решение Керра—Ньюмена. В этом случае можно ввести координаты Крускала u и z и, положив $\zeta = iz$, можно определить несингулярное сечение как в случае Шварцшильда. Мы будем называть его "квази-евклидовым сечением". Метрика на этом сечении комплексна, и оно является асимптотически плоским в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω , где $\Omega = JM^{-1}(r_+^2 + J^2M^{-2})^{-1}$ — угловая скорость черной дыры. Регулярность метрики на горизонте требует, чтобы точка (t, r, θ, ϕ) была отождествлена с точкой $(t + i2\pi\kappa^{-1}, r, \theta, \phi + i2\pi\Omega\kappa^{-1})$. Это вращение не влияет на вычисление $\int [K]d\Sigma$, так что действие еще дается выражением (2.18). Можно также вычислить вклад гравитационного поля в действие для стационарного аксиально-симметричного решения, описывающего черную дыру, окруженную идеальной жидкостью, вращающейся как целое с некоторой другой угловой скоростью. Действие есть

$$I = i2\pi\kappa^{-1} [16\pi \int_{\Sigma} RK^a d\Sigma_a + 2^{-1}M], \quad (2.19)$$

где $K^a \partial/\partial x_a = \partial/\partial t$ — транслирующий время вектор Киллинга, а Σ — поверхность в квази-евклидовом сечении, которая соединяет границу при $r = r_0$ с "осью" или поверхностью бифуркации горизонта при $r = r_+$. Полная масса M , может быть записана как

$$M = M_H + 2 \int_{\Sigma} \left(T_{ab} - \frac{1}{2} g_{ab} T \right) K^a d\Sigma^b, \quad (2.20)$$

где

$$M_H = (4\pi)^{-1} \kappa A + 2\Omega_H J_H; \quad (2.21)$$

M_H — масса черной дыры, A — поверхность горизонта событий, а Ω_H и J_H соответственно — угловая скорость и угловой момент черной дыры [9]. Тензор энергии-импульса жидкости имеет вид

$$T_{ab} = (p + \rho) u_a u_b + p g_{ab}, \quad (2.22)$$

где ρ — плотность энергии, а p — давление жидкости. 4-скорость u_a может быть записана в виде

$$\lambda u^a = K^a + \Omega_m m^a, \quad (2.23)$$

где Ω_m — угловая скорость жидкости, m^a — аксиальный вектор Киллинга, и λ — нормировочный множитель. Подставляя (2.21) и (2.22) в (2.20) находим, что

$$M = (4\pi)^{-1} \kappa A + 2\Omega_H J_H + 2\Omega_m J_m - \int (\rho + 3p) K^a d\Sigma_a, \quad (2.24)$$

где

$$J_m = - \int T_{ab} m^a d\Sigma^b \quad (2.25)$$

есть угловой момент жидкости. Из полевых уравнений $R = 8\pi(\rho - 3p)$, так что это действие равно

$$I = 2\pi i \kappa^{-1} [M - \Omega_H J_H - \Omega_m J_m - \kappa A (8\pi)^{-1} + \int \rho K^a d\Sigma_a]. \quad (2.26)$$

Можно также применять (2.26) к ситуации, такой, как вращающаяся звезда, где черная дыра отсутствует. В этом случае регулярность метрики не требует никакой специальной периодичности временной координаты, и $2\pi\kappa^{-1}$ можно заменить на произвольный параметр β . Значение такой периодичности будет обсуждаться в следующем разделе.

Мы закончим этот раздел вычислением действия для пространства де Ситтера. Оно дается выражением

$$I = (16\pi)^{-1} \int_Y (R - 2\Lambda)(-g)^{1/2} d^4x + (8\pi)^{-1} \int [K] d\Sigma, \quad (2.27)$$

где Λ — космологическая постоянная. Вследствие полевых уравнений $R = 4\Lambda$. Если бы взять в качестве Y обычное вещественное пространство де Ситтера, т.е. сечение, на котором метрика вещественна и лоренцева, объемный интеграл в (2.27) был бы бесконечным. Однако комплексифицированное пространство де Ситтера имеет сечение, на котором метрика является вещественной положительно-определенной метрикой четырехмерной сферы радиуса $3^{1/2}\Lambda^{-1/2}$. Такое евклидово сечение не имеет границы, поэтому величина этого действия на нем равна

$$I = -12\pi i \Lambda^{-1}, \quad (2.28)$$

где множитель $-i$ появился из $(-g)^{1/2}$.

3. СТАТИСТИЧЕСКАЯ СУММА

В подходе к квантованию поля ϕ методом континуального интегрирования амплитуду перехода от полевой конфигурации ϕ_1 в момент времени t_1 к полевой конфигурации ϕ_2 в момент t_2 представляют в виде

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \int d[\phi] \exp(iI[\phi]), \quad (3.1)$$

где континуальный интеграл берется по всем полевым конфигурациям ϕ , которые принимают значение ϕ_1 в момент t_1 и значение ϕ_2 в момент t_2 . Но

$$\langle \phi_2, t_2 | \phi_1, t_1 \rangle = \langle \phi_2 | \exp[-iH(t_2 - t_1)] | \phi_1 \rangle, \quad (3.2)$$

где H — гамильтониан. Если положить $t_2 - t_1 = -i\beta$ и $\phi_1 = \phi_2$ и проинтегрировать по всем ϕ_1 , получим

$$\text{Sp} \exp(-\beta H) = \int d[\phi] \exp(iI[\phi]), \quad (3.3)$$

где континуальный интеграл теперь берется по всем полям, которые периодичны с периодом β по мнимому времени. Левая часть равенства (3.3) — это в точности статистическая сумма Z канонического ансамбля, описывающего поле ϕ при температуре $T = \beta^{-1}$. Таким образом, можно представить статистическую сумму системы как континуальный интеграл по периодическим полям [10]. Когда имеются калибровочные поля, такие, как электромагнитные или гравитационные, следует включить в континуальный интеграл вклады от духов Фаддеева—Попова [11–13].

Можно также рассмотреть большой канонический ансамбль, в котором имеются химические потенциалы μ_i , ассоциированные с сохраняющимися величинами C_i . В этом случае статистическая сумма есть

$$Z = \text{Sp} \exp [-\beta(H - \sum_i \mu_i C_i)]. \quad (3.4)$$

Например, можно было бы рассмотреть систему при температуре $T = \beta^{-1}$ с данным угловым моментом J и электрическим зарядом Q . Соответствующие химические потенциалы тогда суть Ω — угловая скорость, и Φ — электростатический потенциал. Статистическая сумма будет тогда даваться континуальным интегралом по всем полям ϕ , таким, что значение поля в точке $(t + i\beta, r, \theta, \phi + i\beta\Omega)$ равно $\exp(q\beta\Phi)$, умноженной на значение в точке (t, r, θ, ϕ) , где q — заряд поля.

Основной вклад в континуальный интеграл будет от метрик g и полей материи ϕ , которые близки к фоновым полям g_0 и ϕ_0 , имеющим правильную периодичность и являющимся экстремалами действия, т.е. решениями классических уравнений движения. Можно представить g и ϕ в виде

$$g = g_0 + \tilde{g}, \quad \phi = \phi_0 + \tilde{\phi} \quad (3.5)$$

и разложить действие в ряд Тейлора относительно фоновых полей

$$I[g, \phi] = I[g_0, \phi_0] + I_2[\tilde{g}] + I_2[\tilde{\phi}] + \\ + \text{Члены высшего порядка}, \quad (3.6)$$

где $I_2[\tilde{g}]$ и $I_2[\tilde{\phi}]$ квадратичны по флуктуациям \tilde{g} и $\tilde{\phi}$. Если пренебречь членами высшего порядка, то статистическая сумма дается выражением

$$\ln Z = iI[g_0, \phi_0] + \ln \int d[\tilde{g}] \exp(iI_2[\tilde{g}]) + \ln \int d[\tilde{\phi}] \exp(iI_2[\tilde{\phi}]). \quad (3.7)$$

Но по обычным термодинамическим соображениям

$$\ln Z = -WT^{-1}, \quad (3.8)$$

где $W = M - TS - \sum_i \mu_i C_i$ — "термодинамический потенциал" системы. Можно поэтому рассматривать $iI[g_0, \phi_0]$ как вклад фона в $-WT^{-1}$, а второй и третий члены в (3.7) — как вклады, возникающие от тепловых гравитонов и квантов материи с соответствующими химическими потенциалами. Метод вычисления этих последних членов будет указан в другой статье.

Можно применить предыдущий анализ к решениям Керра—Ньюмена, потому что в них точки (t, r, θ, ϕ) и $(t + 2\pi i\kappa^{-1}, r, \theta, \phi + 2\pi i\Omega\kappa^{-1})$ отождествлены (заряд q гравитона и фотона равен нулю). Отсюда следует, что температура T фонового поля есть $\kappa(2\pi)^{-1}$, а термодинамический потенциал равен

$$W = \frac{1}{2}(M - \Phi Q), \quad (3.9)$$

но

$$W = M - TS - \Phi Q - \Omega J. \quad (3.10)$$

Поэтому

$$\frac{1}{2}M = TS + \frac{1}{2}\Phi Q + \Omega J. \quad (3.11)$$

8. ИНТЕГРАЛЫ ДЕЙСТВИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

Но по обобщенной формуле Смарра [9, 14]

$$\frac{1}{2} M = \kappa(8\pi)^{-1} A + \frac{1}{2} \Phi Q + \Omega J. \quad (3.12)$$

Следовательно,

$$S = \frac{1}{4} A \quad (3.13)$$

в полном согласии с предыдущими результатами.

Для пространства де Ситтера

$$W T^{-1} = -12\pi\Lambda^{-1}, \quad (3.14)$$

но в этом случае $W = -TS$, так как $M = J = Q = 0$, поскольку это пространство замкнутое. Тогда

$$S = 12\pi\Lambda^{-1}, \quad (3.15)$$

что снова согласуется с предыдущими результатами. Заметим, что температура T пространства де Ситтера вычитается за период. Этого можно было бы ожидать, так как температура зависит от наблюдателя и связана с нормировкой времениподобного вектора Киллинга.

Наконец, мы рассмотрим случай вращающейся звезды, находящейся в равновесии при некоторой температуре T без горизонтов событий. В этом случае мы должны включить вклад в континуальный интеграл от полей материи, так как именно они создают гравитационное поле. Для квантов материи в тепловом равновесии при температуре T и в объеме $V \gg T^{-3}$ в плоском пространстве термодинамический потенциал дается выражением

$$W T^{-1} = -i \int p(-\eta)^{1/2} d^4x = -p V T^{-1}. \quad (3.16)$$

В ситуациях, когда характерные длины волн, T^{-1} , малы по сравнению с гравитационными масштабами длины, разумно применить это жидкостное приближение для плотности термодинамического потенциала; таким образом, вклад материи в термодинамический потенциал будет иметь вид

$$W_m T^{-1} = -i \int p(-g)^{1/2} d^4x = T^{-1} \int p K^a d\Sigma_a \quad (3.17)$$

(поскольку сигнатура нашей метрики $K^a d\Sigma_a$ отрицательна), но из уравнения (2.26) гравитационный вклад в полный термодинамический потенциал есть

$$W_g = M - \Omega_m J_m + \int_{\Sigma} \rho K^a d\Sigma_a \quad (3.18)$$

Поэтому полный термодинамический потенциал равен

$$W = M - \Omega_m J_m + \int_{\Sigma} (p + \rho) K^a d\Sigma_a \quad (3.19)$$

но

$$p + \rho = \bar{T}s + \sum_i \bar{\mu}_i n_i, \quad (3.20)$$

где \bar{T} — локальная температура, s — плотность энтропии жидкости, $\bar{\mu}_i$ — локальные химические потенциалы, и n_i — плотность числа частиц i -го типа, из которых состоит жидкость. Следовательно,

$$W = M - \Omega_m J_m + \int_{\Sigma} (\bar{T}s + \sum_i \bar{\mu}_i n_i) K^a d\Sigma_a \quad (3.21)$$

В тепловом равновесии

$$\bar{T} = T\lambda^{-1} \quad (3.22)$$

$$\bar{\mu}_i = \mu_i \lambda^{-1}, \quad (3.23)$$

где T и μ_i — значения \bar{T} и $\bar{\mu}_i$ на бесконечности [9]. Таким образом, энтропия есть

$$S = - \int s u^a d\Sigma_a \quad (3.24)$$

Это в точности энтропия материи. В отсутствие горизонта событий гравитационное поле не имеет энтропии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hawking S.W., Commun. Math. Phys., **43**, 199 (1975).
2. Wald R.M., Commun. Math. Phys., **45**, 9 (1975).
3. Hawking S.W., Phys. Rev., **D14**, 2460 (1976).
4. Hawking S.W., Phys. Rev., **D13**, 191 (1976).
5. Penrose R., Phys. Rev. Lett., **14**, 57 (1965).
6. Hawking S.W., Penrose R., Proc. R. Soc. London, **A314**, 529 (1970).
7. Hawking S.W., Ellis G.F.R., The large scale structure of space-time, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973. (Имеется перевод: С.В. Хокинг, Дж. Ф.Р. Илльс, Крупномасштабная структура пространства-времени, "Мир", 1977.)

8. ИНТЕГРАЛЫ ДЕЙСТВИЯ И СТАТИСТИЧЕСКИЕ СУММЫ

8. *Gibbons G.W., Hawking S.W.*, Phys. Rev., **D15**, 2738 (1977).
9. *Bardeen J., Carter B., Hawking S.W.*, Commun. Math. Phys., **31**, 161 (1973).
10. *Feynman R.P., Hibbs A.R.*, Quantum mechanics and path integrals, McGraw-Hill, New York, 1965. (Имеется перевод: Р. Фейнман, А. Хибс, Квантовая механика и интегралы по траекториям, "Мир", 1968.)
11. *Bernard C.W.*, Phys. Rev., **D9**, 3312 (1974).
12. *Dolan L., Jackiw R.*, Phys. Rev., **D9**, 3320 (1974).
13. *Фаддеев Л.Д., Попов В.Н.*, Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).
14. *Smarr L.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 71, 521 (E) (1973).

СОДЕРЖАНИЕ

Вступительная статья. <i>В.П. Фролов</i> . Черные дыры: квантовые процессы, термодинамика, астрофизика	5
1. <i>Д.В. Шьяма</i> . Черные дыры и их термодинамика (перевод В.П. Фролова)	31
2. <i>Б.С. де Витт</i> . Квантовая теория поля в искривленном пространстве-времени (перевод В.А. Загребнова)	66
3. <i>С.В. Хокинг</i> . Нарушение детерминированности при гравитационном коллапсе (перевод И.В. Воловича)	169
4. <i>С.В. Хокинг</i> . Черные дыры и термодинамика (перевод И.В. Воловича)	204
5. <i>Дж. Б. Хартль, С.В. Хокинг</i> . Вывод излучения от черной дыры методом интегрирования по путям (перевод В.П. Фролова)	222
6. <i>С.М. Кристенсен, С.А. Фуллинг</i> . Аномалии следов и эффект Хокинга (перевод И.В. Воловича)	261
7. <i>С.А. Фуллинг</i> . "Излучение" и "поляризация вакуума" вблизи черной дыры (перевод И.В. Воловича)	301
8. <i>Г.В. Гиббонс, С.В. Хокинг</i> . Интегралы действия и статистические суммы в квантовой гравитации (перевод И.В. Воловича)	310

Уважаемый читатель!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во "Мир".

ЧЕРНЫЕ ДЫРЫ

Научный редактор Л. Третьякова
Мл. научные редакторы О. Белова, А. Лебедева
Художник Е. Урусов
Художественный редактор Л. Безрученков
Технический редактор Л. Тихомирова
Корректор И. Максимова

ИБ № 1368

Подписано к печати 27/VII-78 г.

Бумага офсет. №2 60 × 84 $\frac{1}{16}$ = 10,13 бум. л.
Печ. л. 20,25. Уч.-изд. л. 18,41. Изд. № 2/9617
Тираж 6000 экз. Цена 2 р. 10 к. Зак. 3105

Издательство "Мир"
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Московская типография №9 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
Волочаевская ул., д. 40

2 р. 10 к.

243834-1 2



Н
фф

новости фундаментальной физики

